FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

3. Geometrické vektory v $\mathbb{E}_3$, operace s vektory

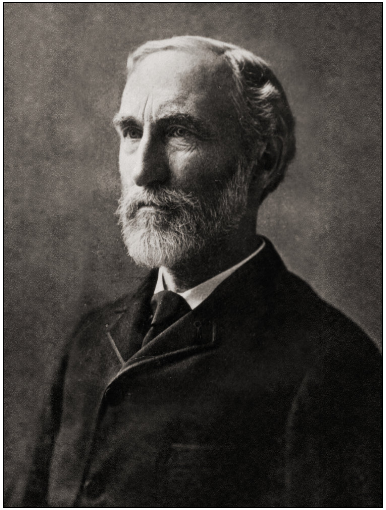
Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

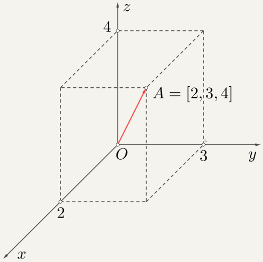
[1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6

[2] Horňáková, Dagmar: *Matematika* I_5, *Vektorová algebra*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 2001. ISBN: 80-902268-9-2


Josiah Willard Gibbs

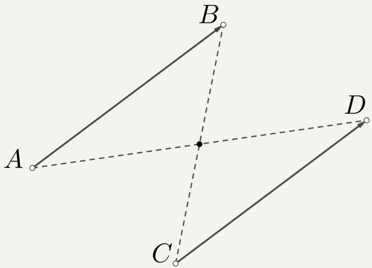
Euklidovským prostorem $\mathbb{E}_3$ budeme rozumět bodový prostor, v němž

- každému bodu $A \in \mathbb{E}_3$ je jednoznačně přiřazena uspořádaná trojice $[a_1, a_2, a_3]$ reálných čísel, které nazýváme souřadnicemi bodu A a píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$,



- každým dvěma bodům $A, B \in \mathbb{E}_3$, kde $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, je přiřazena euklidovská vzdálenost $\rho(A, B)$ bodů A, B, pro kterou platí $\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i - b_i)^2}$.

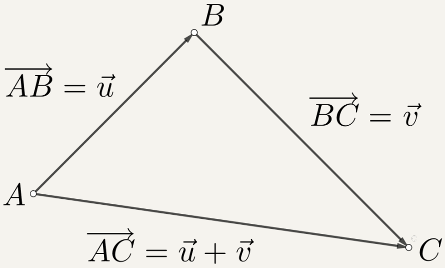
- Každé uspořádané dvojici bodů (A, B) přiřadíme orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B a budeme ji nazývat **umístěním vektoru** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
  $B = A - \vec{u}$, $B - A = \vec{u}$, kde $\vec{u}$ je třída orientovaných úseček, které mají týž směr a velikost
- Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ patří do jedné třídy, jestliže úsečky (A, D), (B, C) mají týž střed



Množinu všech vektorů pak nazýváme **vektorovým zaměřením** prostoru $\mathbb{E}_3$ a označujeme ji $V(\mathbb{E}_3)$. Pro takto zavedené platí

a) Pro libovolný bod $A \in \mathbb{E}_3$ a libovolný vektor $\vec{u} \in V(\mathbb{E}_3)$ existuje jediný bod $B \in \mathbb{E}_3$, takový, že $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

b) Je-li $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, pak $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ se nazývá **součet vektorů** $\vec{u}$, $\vec{v}$.



- Je-li $\vec{u} = \overrightarrow{AA}$, pak vektor $\vec{u}$ se nazývá **nulový vektor**, značí se $\vec{o}$ a má délku rovnou nule.
- Je-li $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, pak vektor $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ (změněná orientace) se nazývá **opačný vektor** k vektoru $\vec{u}$.
- **Úhlem nenulových vektorů** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ se nazývá úhel φ polopřímek AB, AC měřený v mezích $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Poznámka: Prostor bodů v trojrozměrném prostoru $\mathbb{E}_3$ spolu s vektorovým zaměřením $V(\mathbb{E}_3)$, v nichž platí a) a b) se často nazývá **afinním prostorem** a značí se $\mathbb{A}_3$.

Věta

Pro libovolné tři vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ve $V(\mathbb{E}_3)$ platí

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,
3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,
4. *ke každému vektoru $\vec{u}$ existuje opačný vektor $-\vec{u}$ tak, že $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.*

Součin vektoru s reálným číslem

Má-li $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ délku $|\vec{u}|$ a je-li $\gamma \in \mathbb{R}$ libovolné číslo, pak klademe

- $\gamma\vec{u} = \vec{o}$, pokud $\gamma = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{o}$,
- $\gamma\vec{u} = \vec{v}$, kde $\vec{u} \neq \vec{o}$, $|\vec{v}| = |\gamma| \cdot |\vec{u}|$ a vektor $\vec{v}$ je souhlasně (nesouhlasně) rovnoběžný s vektorem $\vec{u}$ v případě $\gamma > 0$ ($\gamma < 0$).

Věta

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla a $\vec{u}$, $\vec{v}$ libovolné vektory ve $V(\mathbb{E}_3)$. Pak platí

1. $\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha\beta\vec{u}$,
2. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$,
3. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$,
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Poznámka:

Pro všechny vektory z $V_3 = V(\mathbb{E}_3)$ platí:

i. $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \implies \vec{u} + \vec{v} \in V_3$ (součet vektorů z V_3 je vektor z V_3).

ii. $\vec{u} \in V_3, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha\vec{u} \in V_3$ (násobek vektoru z V_3 je vektor ve V_3).

iii. Operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem mají vlastnosti uvedené předešlých dvou větách.

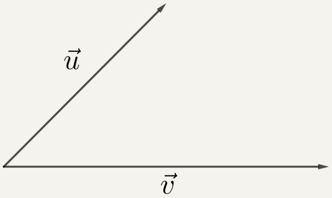
Kolineární / nekolineární vektory

Nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, pro které existují taková umístění, že leží na jedné přímce, nazýváme **kolineární vektory**. Nulový vektor považujeme za kolineární s každým vektorem. Pro kolineární vektory platí:

a) Je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$, pak existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\vec{v} = k\vec{u}$.

b) Rovnice $k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{o}$ je splněna alespoň pro jednu dvojici čísel $k, l \in \mathbb{R}$, příčemž čísla k, l nejsou současně rovan nule.

Řekneme naopak, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou **nekolineární**, když rovnice $k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{o}$ je splněna pouze tehdy, když $k = 0$ a současně $l = 0$.



Příklad 3.1

Vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 = -2\vec{x}_1$ jsou kolineární, protože vektor $\vec{x}_2$ je násobkem vektoru $\vec{x}_1$. V jiném pohledu, platí rovnice $2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{o}$ a rovnice $k\vec{x}_1 + l\vec{x}_2 = \vec{o}$ má nenulové řešení $k = 2$, $l = 1$.

Příklad 3.2

Vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ jsou nekolineární. Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ rovněž nekolineární.

Komplanární / nekomplanární vektory

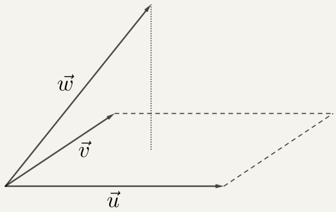
Řekneme, že nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou **komplanární**, jestliže existují taková jejich umístění, že leží v jedné rovině. Pokud je některý z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nulovým vektorem, pak tuto trojici vektorů považujeme také za komplanární. Pro komplanární vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ platí:

a) Jsou-li $\vec{u}$, $\vec{v}$ nekolineární vektory, pak existuje právě jedna dvojice čísel $k, l \in \mathbb{R}$ taková, že $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$.

b) Rovnice $k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w} = \vec{o}$ je splněna alespoň pro jednu trojici čísel $k, l, m \in \mathbb{R}$, přičemž čísla k, l, m nejsou současně rovna nule.

Komplanární / nekomplanární vektory

Trojici vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazveme **nekomplanární**, když je rovnice $k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w} = \vec{o}$ splněna pouze pro $k = l = m = 0$.



Příklad 3.3

Vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ jsou nekomplanární. Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{w} = \vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3$ rovněž nekomplanární.

Skalární součin vektorů

Definice

Skalárním součinem nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V(\mathbb{E}_3)$ rozumíme číslo (skalár)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi,$$

kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ jsou jejich délky. Je-li alespoň jeden z vektorů nulový, klademe $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Věta

Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V(\mathbb{E}_3)$, pak

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
3. $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \qquad (\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o})$.

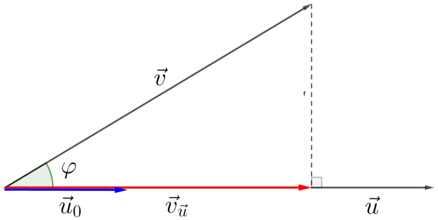
Využití:

1. Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.
2. Výpočet délky nenulového vektoru: $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$.
3. Výpočet úhlu nenulových vektorů:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \qquad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

4. Nalezení kolmého průmětu $\vec{v}_{\vec{u}}$ vektoru $\vec{v}$ do vektoru $\vec{u}$:

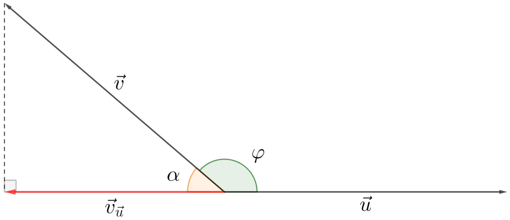
$$\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}.$$



Využití:

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \|\vec{v}\| \cos\varphi \cdot \vec{u}_0 = \|\vec{v}\| \cdot \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$$

Výše uvedený vztah platí i pro $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$



5. Práce A, kterou vykoná síla $\vec{F}$ stálého směru a velikosti po přímé dráze $\vec{s}$ je dána vztahem $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Příklad 3.4

Vypočítejte $\|\vec{a}+\vec{b}\|$, jestliže $\|\vec{a}\| = 4$, $\|\vec{b}\| = 5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Vektorový součin vektorů

Definice

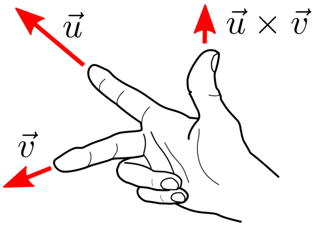
Vektorovým součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V(\mathbb{E}_3)$ rozumíme vektor označovaný jako $\vec{u} \times \vec{v}$.

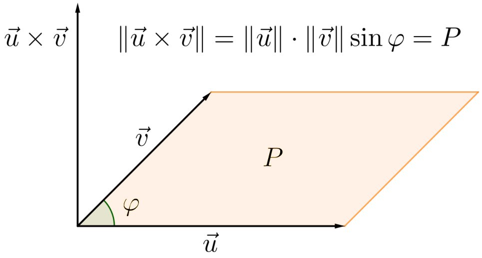
Je-li alespoň jeden z vektorů nulový nebo jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ kolineární, klademe $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.

V opačném případě požadujeme, aby měl vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ následující vlastnosti:

1. Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$.
2. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ tvoří v tomto pořadí pozitivní trojici vektorů (platí pravidlo pravé ruky).
3. Délka vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu plochy sestrojené nad vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, tj.
$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \varphi,$$
kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Vektorový součin vektorů





Věta

Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ *a* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V(\mathbb{E}_3)$*, pak*

1. $\vec{u} \times v = -\vec{v} \times \vec{u}$,
2. $\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$,
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,
4. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$.

Neplatí!

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$,
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$,
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow (\vec{u} = \vec{o} \text{ nebo } \vec{v} = \vec{o})$.

Využití:

1. Vyšetřování kolinearity nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$:

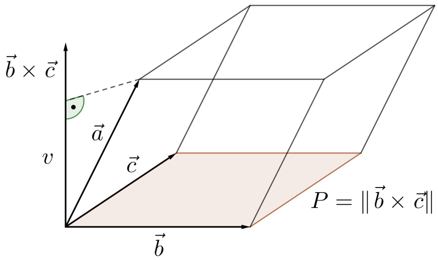
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Leftrightarrow (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi).$$

2. Výpočet obsahu plochy sestrojené nad vektry $\vec{u}$, $\vec{v}$. (Výpočet obsahu trojúhelníku – $P_\triangle = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$)
3. Nalezení vektoru kolmého ke dvěma zadaným nenulovým vektorům.

Příklad 3.5

Vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ mají délky $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ a svírají úhel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}$. Určete obsah trojúhelníku $\triangle ABC$.

Smíšený součin vektorů



- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \dots$ pozitivní trojice vektorů
- $V = P \cdot v$

$$P = \|\vec{b} \times \vec{c}\|$$

$$v = \|\vec{a}_{\vec{b}\times\vec{c}}\| = \|\vec{a}\| \cos(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\|\vec{a}\| \cdot \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b} \times \vec{c}\|} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{\|\vec{b} \times \vec{c}\|}.$$

- $V = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cdot \dfrac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{\|\vec{b} \times \vec{c}\|} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$

Definice

Nechť $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V(\mathbb{E}_3)$. Číslo

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

nazveme **smýšeným součinem vektorů** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v tomto pořadí).

Poznámka:

1. Víme, že $\vec{c} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{c}$. Proto

$$[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

2. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}].$

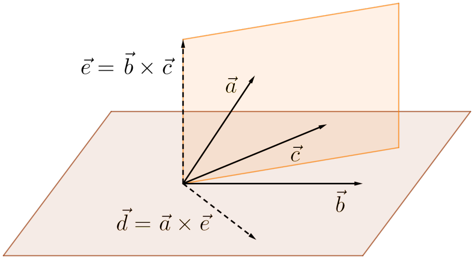
Využití:

1. Výpočet objemu rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V(\mathbb{E}_3)$:
$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$
2. Vyšetřování komplanárnosti vektorů: Nenulové vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou komplanární právě tehdy, když je
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0.$$
3. Stanovení pozitivní trojice vektorů:
   - ♣ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je pozitivní trojice vektorů, když $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$ (platí pravidlo pravé ruky)
   - ♣ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je negativní trojice vektorů, když $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$ (neplatí pravidlo pravé ruky)

Příklad 3.6

Rovnoběžnostěn je určen vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ a víme, že $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 2$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$, vektor $\vec{a}$ svírá se základnou určenou vektory $\vec{b}$, $\vec{c}$ úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu.

Dvojný vektorový součin vektorů



$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

- $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{e}} \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{e} \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{e} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{e} \cdot \vec{c})\vec{d} = ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d})\vec{c} - ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c})\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{d}$.
- $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{e}} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{e} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c} \cdot (\vec{d} \times \vec{e}) = \vec{c} \cdot (\vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = \vec{c} \cdot ((\vec{d} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{d} \cdot \vec{a})\vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$.

Důležité identity

Věta

Nechť $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V(\mathbb{E}_3)$. *Pak platí*

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$,
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$,
3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{d}$,
4. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \cdot [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{u} & \vec{a} \cdot \vec{v} & \vec{a} \cdot \vec{w} \\ \vec{b} \cdot \vec{u} & \vec{b} \cdot \vec{v} & \vec{b} \cdot \vec{w} \\ \vec{c} \cdot \vec{u} & \vec{c} \cdot \vec{v} & \vec{c} \cdot \vec{w} \end{vmatrix}$.

- V identitě 1. položme $\vec{a} = \vec{c} = \vec{u}$, $\vec{b} = \vec{d} = \vec{v}$. Pak

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix} = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{v} \cdot \vec{u}), \text{ tj.}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \geq 0.$$

- **Cauchyova identita:**

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

Děkuji za pozornost!