FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

8. Reálná funkce jedné reálné proměnné, explicitní a parametrické zadání funkce. Základní vlastnosti funkcí. Složená a inverzní funkce. Elementární funkce.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

[1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0

Joseph Liouville

Nejznámějšími podmnožinami reálných čísel (vedle množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, kde platí $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$) jsou **intervaly**. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Připomeňme:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $\langle a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Prvky $-\infty$ a ∞, tzv. *nevlastní body*, **nepatří** do $\mathbb{R}$!
Zavedeme označení $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definice

Řekneme, že **funkčním předpisem** $y = f(x)$ je určena **reálná funkce** f **jedné reálné proměnné** x, jestliže

a) je dán obor $A \subseteq \mathbb{E}_1$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x;

b) každému $x \in A$ je přiřazena **právě jedna** reálná hodnota závislé proměnné y podle funkčího předpisu $y = f(x)$.

$y = f(x)$ **explicitní zadání**

$A = D(f)$ **definiční obor**

Pokud není definiční obor zadán, bereme **přirozený definiční obor** — množinu všech reálných čísel, pro které má funkční předpis $y = f(x)$ smysl.

$f(A) = H(f)$ **obor funkčních hodnot**

$$f : y = f(x), \quad x \in A$$

Funkce a její graf

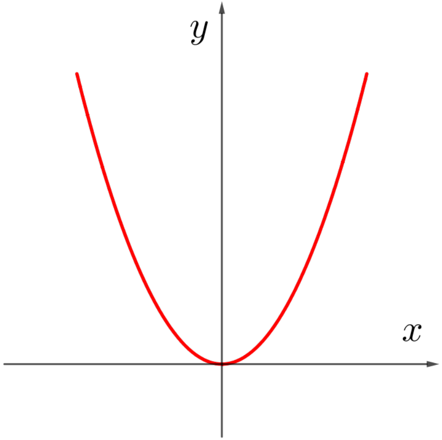
Funkce f a g jsou si rovny, jestliže:

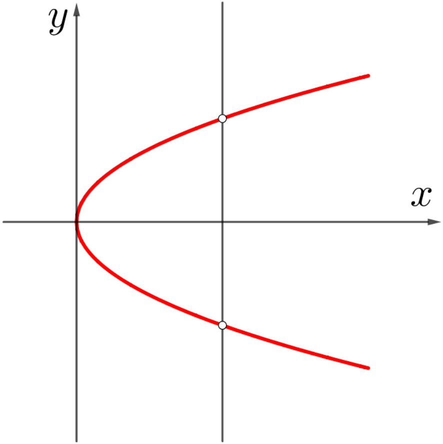
1. $D(f) = D(g) = A$,
2. $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in A$.

Definice (graf funkce)

Množina všech bodů roviny daných souřadnicemi $[x, f(x)]$ se nazývá **graf funkce** f.

- pravoúhlá kartézská soustava souřadnic $\langle 0; x, y \rangle$
- $Gr\ f =$ graf $f := \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \in D(f), y = f(x)\}$
- každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše v jednom bodě





Funkce $f(x) = x^2$.

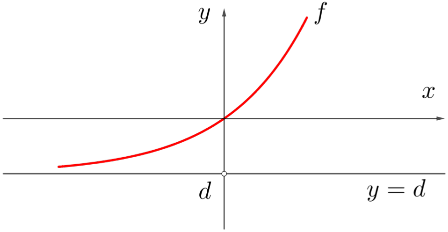
Nejde o graf funkce.

Definice (Ohraničenost)

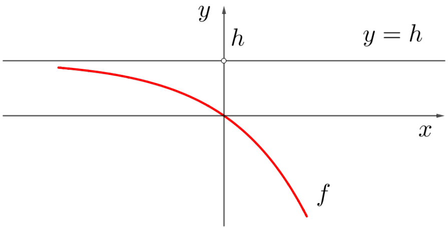
Buď f funkce, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- **zdola ohraničená**, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \geq d$,
- **shora ohraničená**, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq h$,
- **ohraničená**, jestliže existují $d, h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $d \leq f(x) \leq h$.

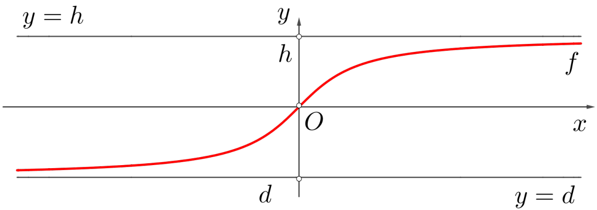
Základní vlastnosti funkcí



Zdola ohraničená funkce.



Shora ohraničená funkce.



Ohraničená funkce.

Definice (Parita)

Buď f taková funkce, že pro její definiční obor platí

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f).$$

- Řekneme, že funkce f je **sudá**, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí

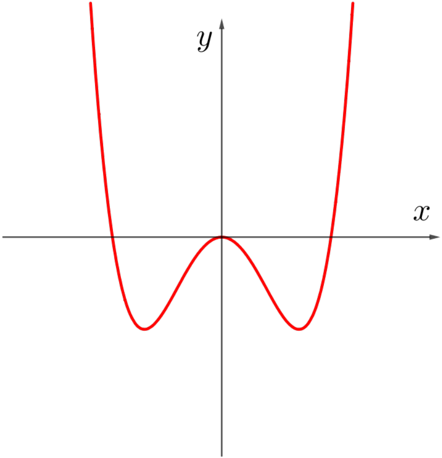
$$f(-x) = f(x).$$

  – *graf je symetrický vzhledem k ose y*

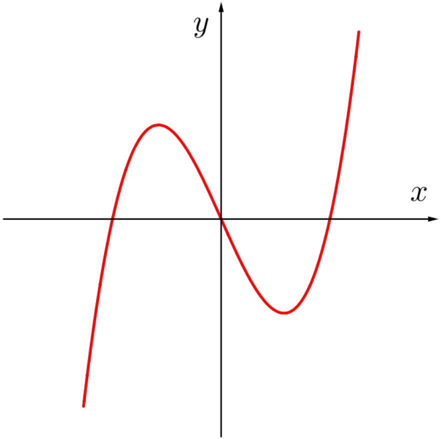
- Řekneme, že funkce f je **lichá**, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí

$$f(-x) = -f(x).$$

  – *graf je symetrický vzhledem k počátku*



Sudá funkce.



Lichá funkce.

Příklad 8.1

Určete zda je funkce lichá nebo sudá

a) $y = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$

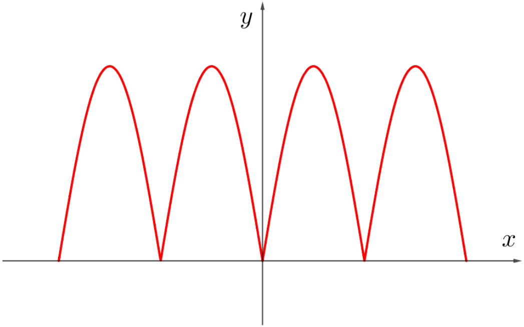
b) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2} - 1}$

c) $y = x^2 - 4x + 5$

Definice (Periodičnost)

Nechť $p \in \mathbb{R}, p > 0$. Řekneme, že funkce f je **periodická** s **periodou** p, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí

$$x + p \in D(f), \qquad f(x+p) = f(x).$$



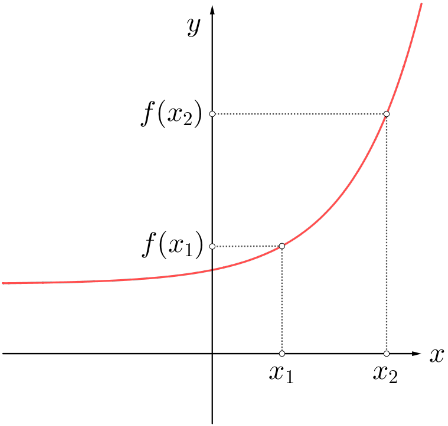
Periodická funkce.

Definice (rostoucí a klesající)

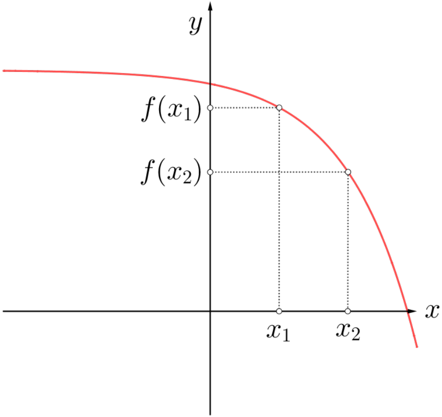
Buď f funkce, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- **rostoucí**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$
- **neklesající**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
- **klesající**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$
- **nerostoucí**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Základní vlastnosti funkcí

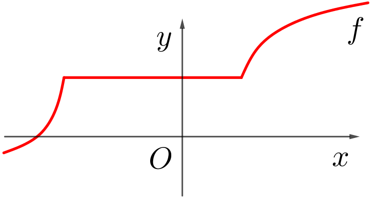


Rostoucí funkce.

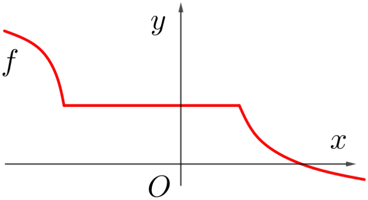


Klesající funkce.

Základní vlastnosti funkcí



Neklesající funkce.



Nerostoucí funkce.

Definice (monotónost)

- Funkce je **monotóní** na množině M, pokud je neklesající na M, nebo nerostoucí na M.
- Funkce je **ryze monotóní** na množině M, pokud je klesající na M, nebo rostoucí na M.

Definice (Prostá funkce)

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M **prostá**, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in M$ platí

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Vodorovné přímky protnou graf prosté funkce nejvýše jednou.
- Je-li funkce f na M ryze monotónní, pak je f na M prostá.
- Opak (f je prostá $\Rightarrow$ f je ryze monotónní) **neplatí**!

Definice

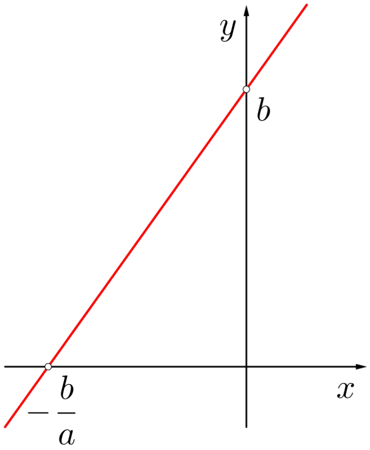
Jako **elementární funkce** je označována funkce, kterou lze získat konečným počtem sečtení, odečtení, vynásobení, podělení a složení z

- exponenciální,
- logaritmické,
- konstantní,
- mocninné,
- goniometrické,
- cyklometrické,
- hyperbolické a
- hyperbolometrické

funkce.

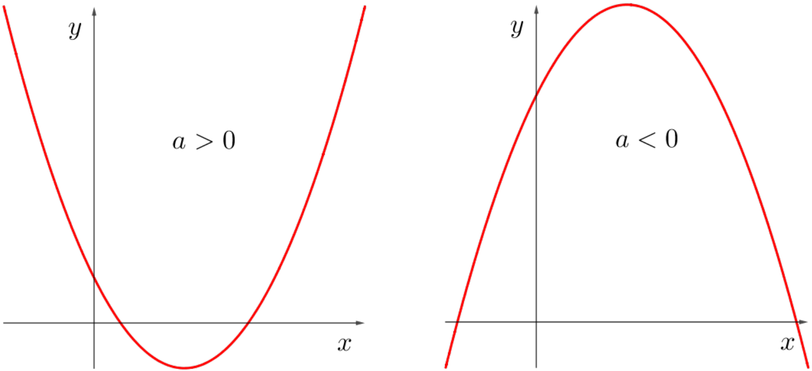
Lineární funkce $y = ax + b$

- $a, b \in \mathbb{R}$; $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: přímka
- $a = 0$: **konstantní funkce**
  $y = b$
- $b = 0$: **přímá úměrnost**
  $y = ax$



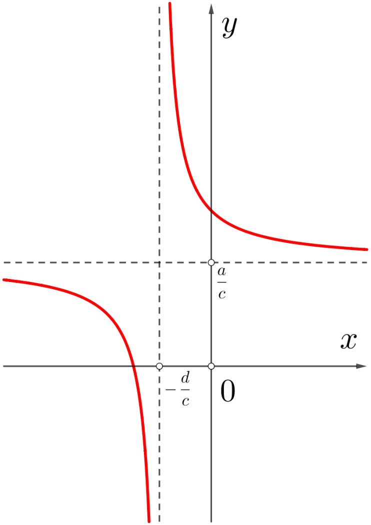
Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$

- $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola



Lineární lomená funkce $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$;
  $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
- graf: rovnoosá hyperbola
- zvláštní případ: **nepřímá úměrnost** $y = \dfrac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

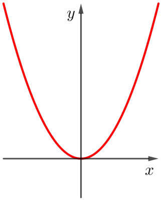


Mocninná funkce

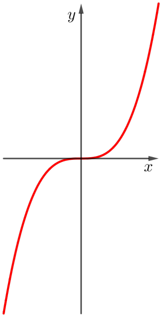
Mocninná funkce $y = x^n$

- $n \in \mathbb{N}$, $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola n-tého stupně

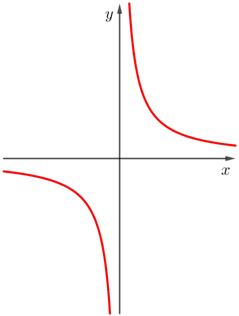
- $n \in \mathbb{Z}^-$, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- graf: hyperbola n-tého stupně



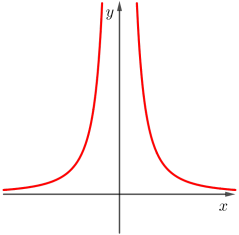
$n \in \mathbb{N}$
n – sudé



$n \in \mathbb{N}$
n – liché



$n \in \mathbb{Z}^-$
n – liché

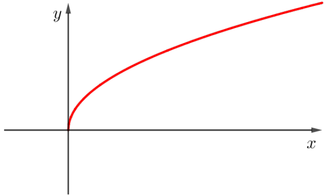


$n \in \mathbb{Z}^-$
n – sudé

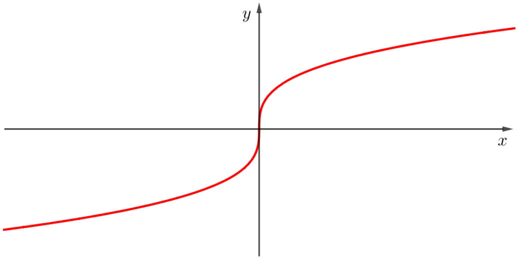
n-tá odmocnina $y = \sqrt[n]{x}$

- $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$
- graf: parabola n-tého stupně

- n sudé, $D(f) = \mathbb{R}_0^+$
- n liché, $D(f) = \mathbb{R}$



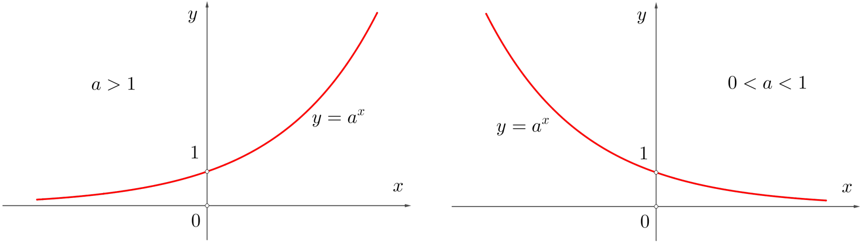
n – sudé



n – liché

Exponenciální funkce $\quad y = a^x$

- $a > 0$; $a \neq 1$; $a \in \mathbb{R}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$

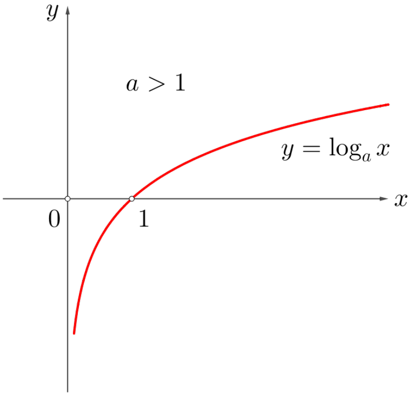


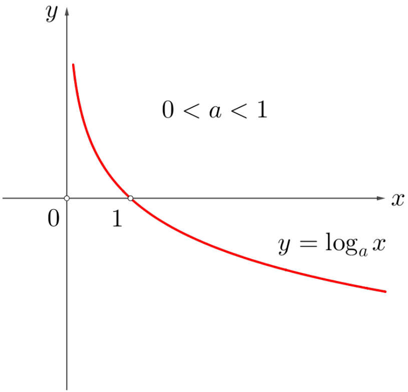
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
- $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$

Logaritmická funkce $y = \log_a x$

- $a > 0$; $a \neq 1$; $a \in \mathbb{R}$; $D(f) = \mathbb{R}^+$; $H(f) = \mathbb{R}$
- **přirozený logaritmus**: $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$, $\mathrm{e} \doteq 2,71$
- **dekadický logaritmus**: $\log x = \log_{10} x$



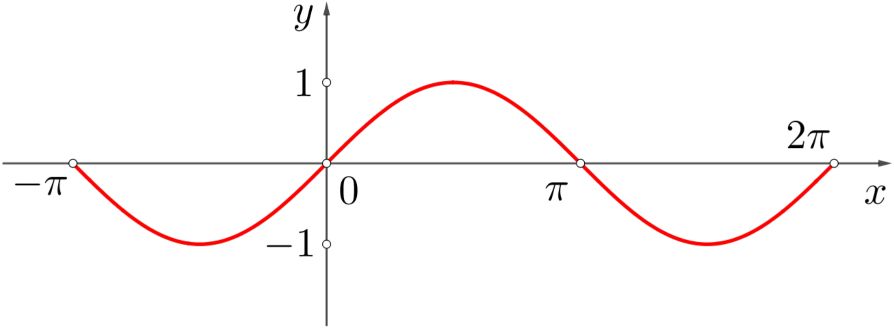


$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

- $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 \cdot x_2)$
- $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \dfrac{x_1}{x_2}$
- $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

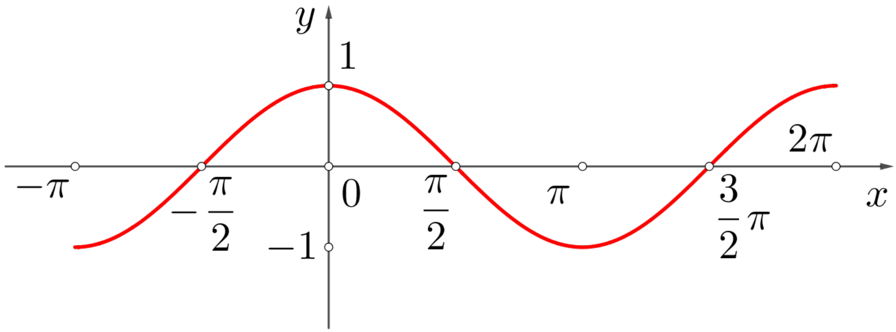
Sinus $y = \sin x$

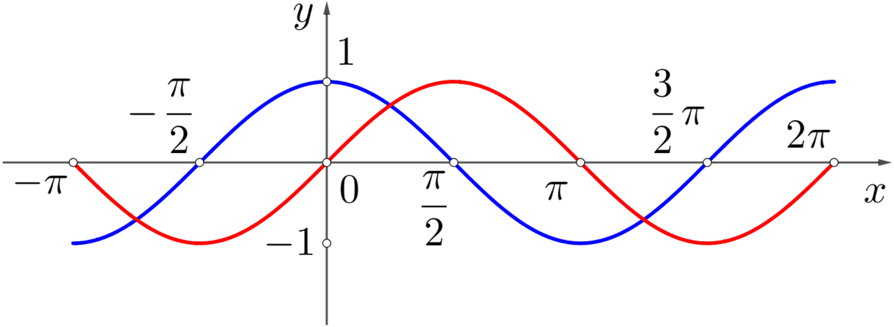
- $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π



Kosinus $y = \cos x$

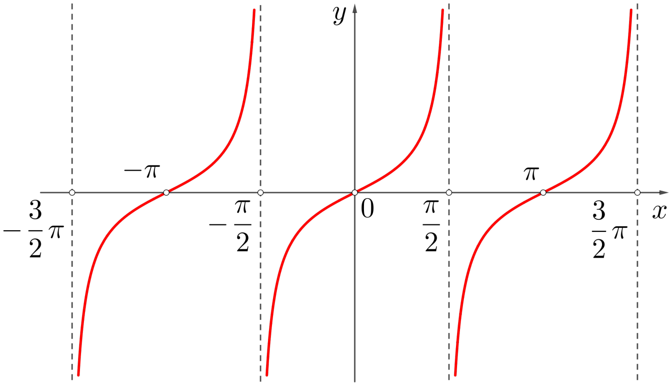
- $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- sudá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π




y
1
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$
2π
$-\pi$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x
-1

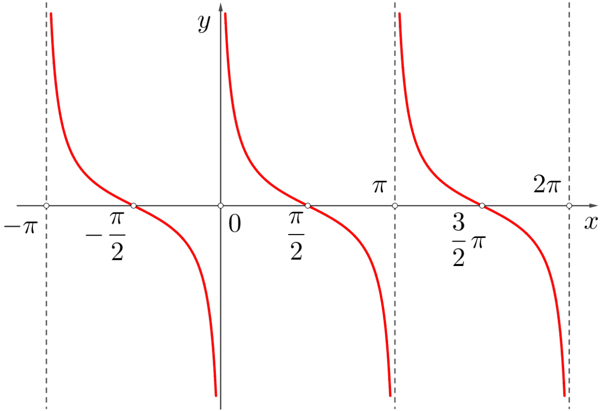
Tangens $\quad y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

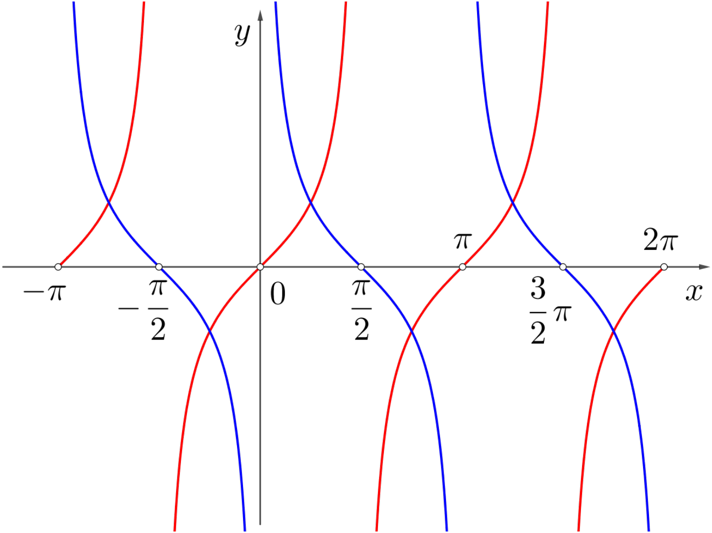
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}; H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π



Kotangens $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π




y
x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π

Goniometrické funkce

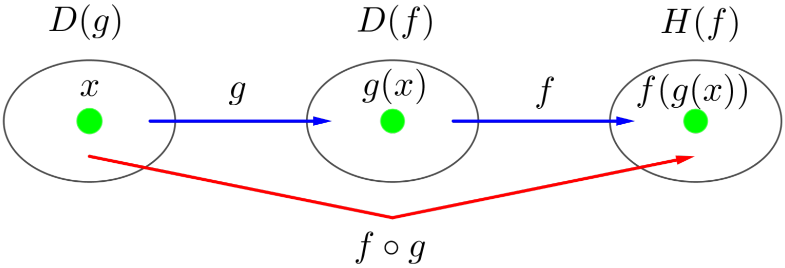
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0	$\times$
$\operatorname{cotg} x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\times$	0

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Definice (Složená funkce)

Nechť $u = g(x)$ je funkce s definičním oborem $D(g)$ a oborem hodnot $H(g)$. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $D(f)$ a navíc platí $H(g) \subseteq D(f)$.

Složenou funkcí $(f \circ g)(x)$ rozumíme přiřazení, které $\forall x \in D(g)$ přiřadí $y = f(u) = f\big(g(x)\big)$. Funkci g nazýváme **vnitřní složkou** a funkci f **vnější složkou** složené funkce. Tedy $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

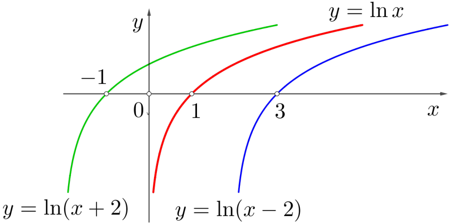


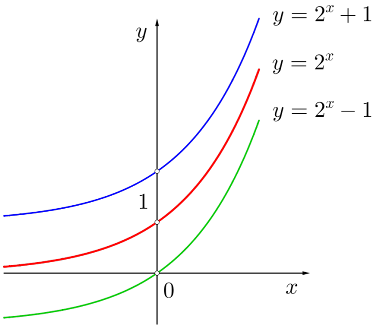
Mezi základní operace s funkcemi (vedle skládání funkcí), patří **sčítání**, **odčítání**, **násobení** a **dělení** funkcí definované takto:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x),\\ (f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x),\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Poznámka:

Předpokládáme, že definiční obory funkcí f a g jsou shodné, navíc u dělení funkcí je $D\left(\frac{f}{g}\right)$ zúžen o ta x, pro která platí $g(x)=0$.





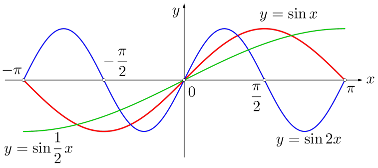
Posunutí ve směru osy x

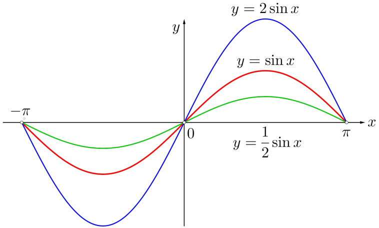
$$y = f(x \pm a)$$

Posunutí ve směru osy y

$$y = f(x) \pm a$$

Transformace grafů funkcí





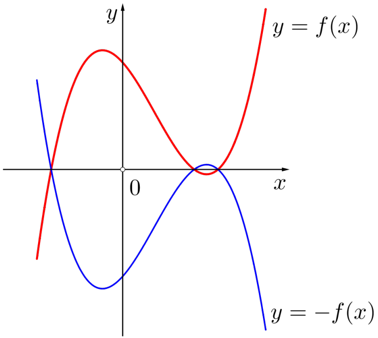
Stlačení / roztažení ve směru x

$$y = f(ax)$$

Stlačení / roztažení ve směru y

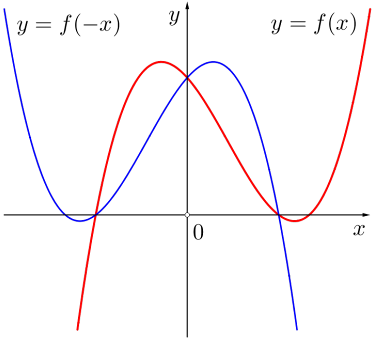
$$y = af(x)$$

Transformace grafů funkcí



Překlopení podle osy x

$$y = -f(x)$$



Překlopení podle osy y

$$y = f(-x)$$

Parametrické zadání funkce

Definice

Funkcemi $x = g(t)$, $y = h(t)$, definovanými na oboru parametrů $M \subset \mathbb{R}$, je určená **parametricky funkce** f, jestliže množina všech bodů $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ takových, že $x = g(t), y = h(t), t \in M$, je grafem funkce.

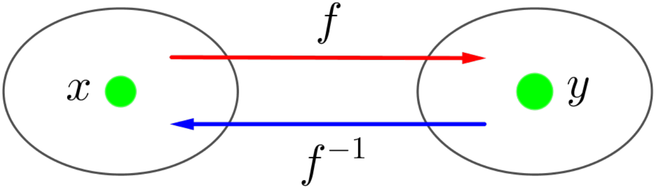
Poznámka:
Znalost explicitního vyjádření funkce f nám umožňuje i tzv. **přirozenou parametrizaci**, kdy za parametr t zvolíme nezávisle proměnnou x a pro závisle proměnnou dostaneme z explicitního vyjádření předpis $y = f(t)$.

$$
\begin{aligned}
& y = f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle \\
& \downarrow \\
& x = t \\
& y = f(t), \quad t \in \langle a, b\rangle
\end{aligned}
$$

Definice (Inverzní funkce)

Nechť f je prostá funkce. Funkce f^{-1}, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to x, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkcí k funkci** f. Píšeme $x = f^{-1}(y)$.

$$D(f) = H(f^{-1}) \qquad H(f) = D(f^{-1})$$



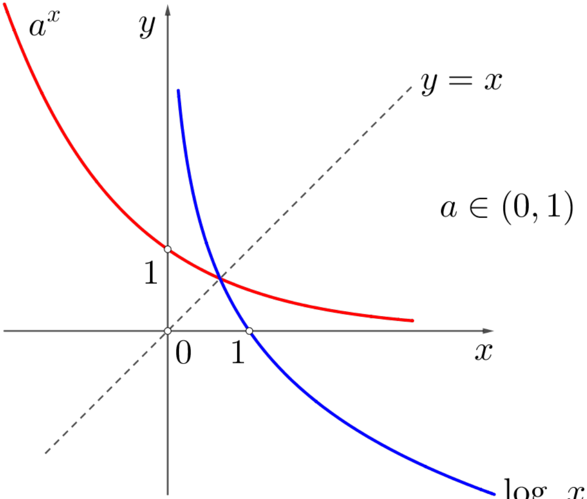
Inverzní funkce

Nechť f je prostá funkce. Potom platí

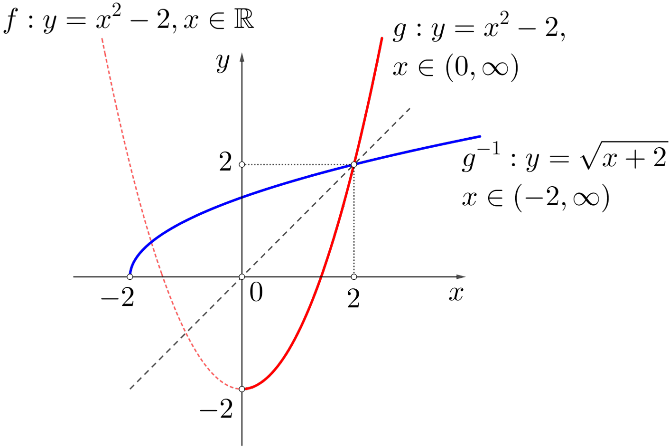
- $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$.
- $f(f^{-1}(x)) = x, x \in D(f^{-1})$ a $f^{-1}(f(x)) = x, x \in D(f)$.
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Je-li funkce f rostoucí/klesající, je také funkce f^{-1} rostoucí/klesající.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (přímky $y = x$).

Výpočet inverzní funkce f^{-1} z funkce f

1) V zápisu $y = f(x)$ zaměníme x a y, čímž dostaneme $x = f(y)$.
2) Z rovnice $x = f(y)$ vyjádříme y a máme předpis $y = f^{-1}(x)$.


a^x
y
$y = x$
$a \in (0, 1)$
1
0
1
x
$\log_a x$

Poznámka:
Je-li funkce g definovaná na množině $M \subset d(f)$ a přitom platí $g(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, pak říkáme, že funkce g je **restrikcí** (zúžením) funkce f na množinu M. Píšeme $g = f|_M$.



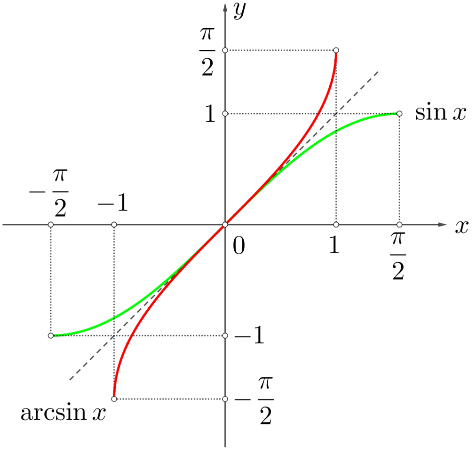
Inverzní funkce

K elementární funkci je inverzní vždy jiná elementární funkce:

$f(x)$	$D(f)$	$f^{-1}(x)$	$D(f^{-1})$
x^2	$x \in \langle 0, \infty)$	$\sqrt{x}$	$x \in \langle 0, \infty)$
x^2	$x \in (-\infty, 0\rangle$	$-\sqrt{x}$	$x \in \langle 0, \infty)$
x^3	$x \in \mathbb{R}$	$\sqrt[3]{x}$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$x \in \mathbb{R}$	$\ln x$	$x \in (0, \infty)$
a^x	$x \in \mathbb{R}$	$\log_a x$	$x \in (0, \infty)$
$\sin x$	$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$\arcsin x$	$x \in \langle -1, 1\rangle$
$\cos x$	$x \in \langle 0, \pi\rangle$	$\arccos x$	$x \in \langle -1, 1\rangle$
$\operatorname{tg} x$	$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\operatorname{arctg} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{cotg} x$	$x \in (0, \pi)$	$\operatorname{arccotg} x$	$x \in \mathbb{R}$

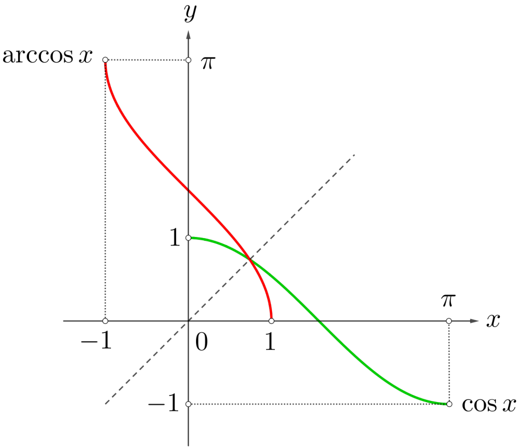
Arkussinus $y = \arcsin x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle; \quad H(f) = \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$



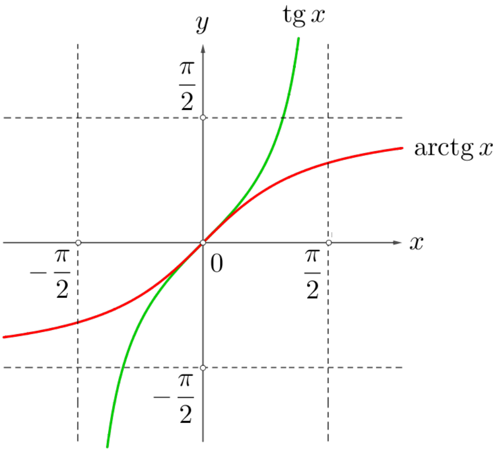
Arkuskosinus $y = \arccos x$

- $D(f) = \langle -1, 1\rangle; \quad H(f) = \langle 0, \pi\rangle$



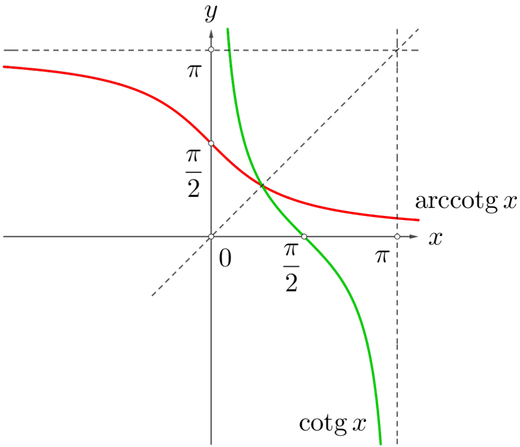
Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



Arkuskotangens $y = \operatorname{arccotg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \langle 0, \pi \rangle$

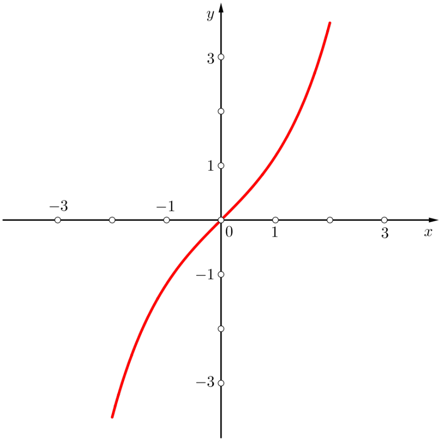


x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Hyperbolický sinus $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

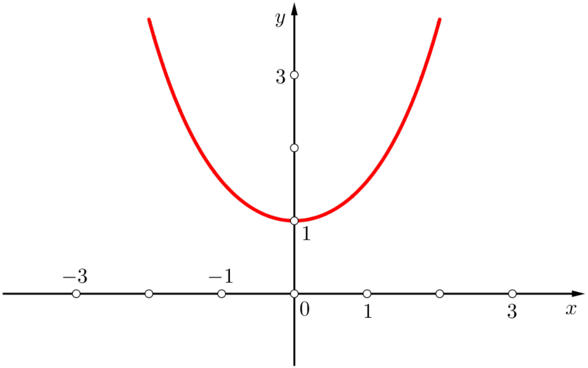
- $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}$
- lichá



Hyperbolické funkce

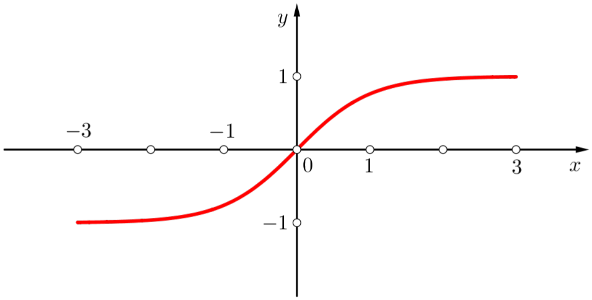
Hyperbolický kosinus $\quad y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $D(f) = \mathbb{R}; \quad H(f) = \langle 1, \infty)$
- sudá



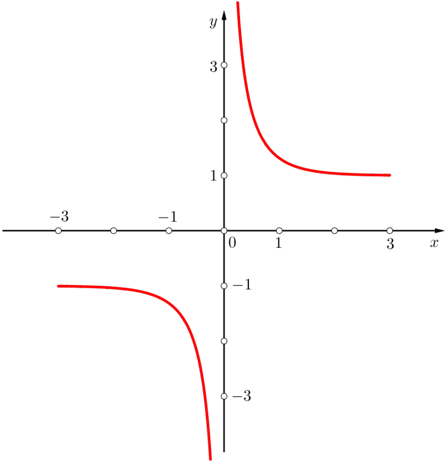
Hyperbolický tangens $y = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

- $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = (-1, 1)$
- lichá



Hyperbolický kotangens $y = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

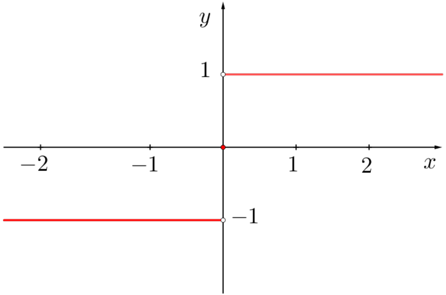
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}; \quad H(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- lichá



Další důležité funkce

Znaménková funkce $y = \operatorname{sgn} x$

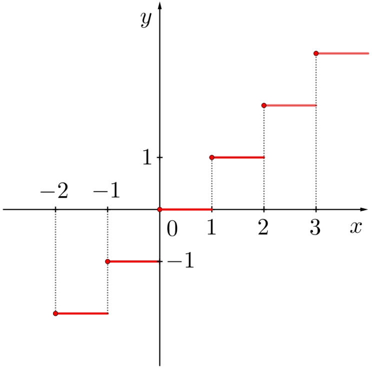
- $\operatorname{sgn} x : \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$
- lichá



Další důležité funkce

Celá část (dolní celá část) $y = \lfloor x \rfloor$

- $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$



Děkuji za pozornost!