FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

10. Posloupnost a její limita, limita a spojitost funkce

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

[1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Definice

Posloupnost reálných čísel je funkce

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

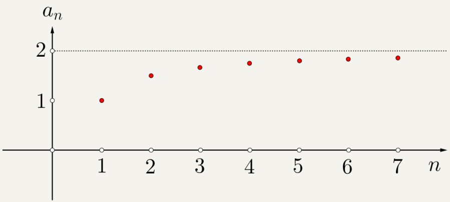
též píšeme

$$f : n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N},$$

jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel a oborem hodnot je podmnožina reálných čísel $\mathbb{R}$. Funkční hodnotu $f(n)$ značíme a_n a nazýváme ji $n-$**tým členem posloupnosti**.
Posloupnost značíme symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, zkráceně $(a_n)_1^{\infty}$ nebo jen $(a_n), n \in \mathbb{N}$. Lze ji též zapsat v rozepsaném tvaru $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

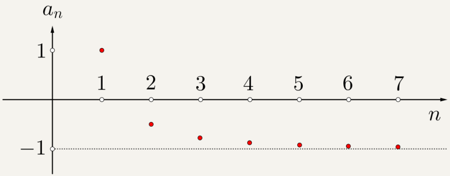
Vlatnosti posloupností

1. (a_n) je **shora ohraničená** – existuje číslo $h \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



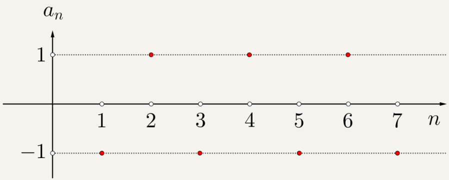
$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

2. (a_n) je **zdola ohraničená** – existuje číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq d$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



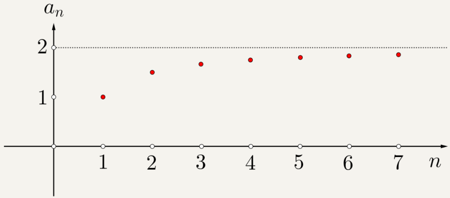
$$a_n = \frac{2-n^2}{n^2}$$

3. (a_n) je **ohraničená** – existují čísla $h, d \in \mathbb{R}$ takové, že $d \leq a_n \leq h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



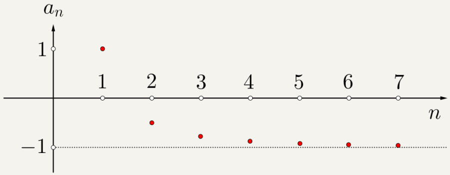
$$a_n = \cos \pi n$$

4. (a_n) je **rostoucí** – platí $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



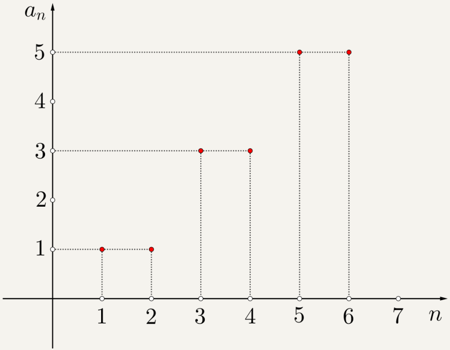
$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

5. (a_n) je **klesající** – platí $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



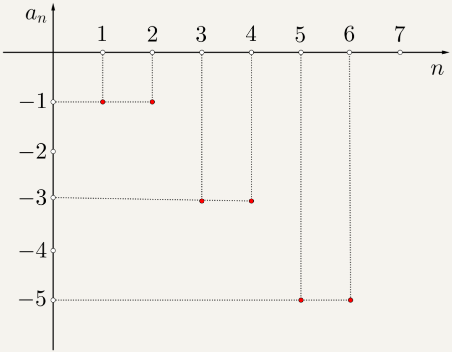
$$a_n = \frac{2-n^2}{n^2}$$

6. (a_n) je **neklesající** – platí $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



$$a_n = n - \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

7. (a_n) je **nerostoucí** – platí $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} - n$$

8. (a_n) je **monotónní** – (a_n) je nerostoucí nebo neklesající.
9. (a_n) je **ryze monotónní** – (a_n) je rostoucí nebo klesající.
10. (a_n) je **stacionární** – $a_n = a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = (-1)^{2n+4}$$

11. (a_n) je **aritmetická** – $a_n = a_1 + (n-1)d, d \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, d diference.

$$a_n = 5n - 2$$

12. (a_n) je **geometrická** – $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, q \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, q kvocient.

$$a_n = \frac{3^{n-1}}{5^{2n}}$$

Definice

Posloupnost (a_n) **má limitu** $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.
Posloupnost (a_n) **má limitu** ∞ **(resp.** $-\infty$**)**, jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n > h$ (resp. $a_n < h$).
Posloupnost, která:

- má vlastní limitu, se nazývá **konvergentní**,
- má nevlastní limitu, se nazývá **divergentní**,
- limitu nemá, se nazývá **oscilující**.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Leftrightarrow \forall\, h \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > h, \text{resp. } a_n < h$$

Definice

Je-li (a_n) posloupnost a (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel (indexů), pak posloupnost (a_{k_n}) se nazývá **vybraná posloupnost** z posloupnosti (a_n).

Základní vlastnosti limit posloupností

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Je-li $\lim a_n = a$, pak pro každou vybranou posloupnost (a_{k_n}) z posloupnosti (a_n) platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.
3. Monotónní posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je ohraničená.
4. Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}, n > k_0 \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, pak také $a \leq b$.
5. Změníme-li v posloupnosti konečný počet členů, pak se její limita nezmění.
6. Je-li (b_n) ohraničená posloupnost a $\lim a_n = 0$, pak $\lim a_n b_n = 0$.
7. Je-li $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim a_n = 0 \iff \lim \dfrac{1}{a_n} = \infty$

Algebra limit posloupností

Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, přičemž $a, b \in \mathbb{R}^*$, pak platí

1. $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$,
2. $\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
3. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$,
4. $\lim |a_n| = |a|$,

pokud mají výrazy na pravých stranách smysl.

Definované oparace

Mezi **definované operace** pro reálná čísla $k \in \mathbb{R}$ a nevlastní čísla ∞ a $-\infty$ patří:

- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$,
- $k \pm \infty = \pm\infty + k = \pm\infty$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $-(-\infty) = \infty$,
- $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \pm\infty$ pro $k > 0$,
  $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \mp\infty$ pro $k < 0$,
- $\dfrac{k}{\pm\infty} = 0$,
- $k^{\infty} = 0$ pro $0 < k < 1$,
  $k^{\infty} = \infty$ pro $k > 1$,
  $\infty^{\infty} = \infty$.

Neurčité výrazy

Naopak **nejsou definovány** (tzv. neurčité) výrazy:

- $\infty - \infty, -\infty + \infty,$
- $0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty),$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \dfrac{\pm\infty}{\mp\infty},$
- $\dfrac{k}{0}, \dfrac{\pm\infty}{0},$
- $(\pm\infty)^0, 0^0,$
- $1^\infty, k^\infty$ pro $k < 0.$

Tyto **neurčité výrazy** budeme spolu s výrazy obsahující prvky ∞ a $-\infty$ a výrazem $\dfrac{a}{0}$ zapisovat do $\Big\| \quad \Big\|$.

Příklad 10.1

Vypočítejte limity posloupností

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{2}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-123n-1000}{2n^2+n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (5n^2-3n)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^2}{100n+2}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})$.

Příklad 10.2

Příklady posloupností, pro něž

$$\lim a_n = \lim b_n = \infty, \text{ ale } \lim(a_n - b_n) \text{ je:}$$

a) ∞ : $a_n = n^2, b_n = n,$

b) $-\infty$: $a_n = n, b_n = n^3,$

c) a : $a_n = n + 5, b_n = n + 1,$

$$a_n = n^2 + \cos\frac{1}{n}, b_n = n^2.$$

Příklad 10.3

Příklady posloupností, pro něž

$$\lim a_n = 0, \lim b_n = \infty, \text{ ale } \lim(a_n \cdot b_n) \text{ je:}$$

a) ∞ : $\quad a_n = \dfrac{1}{n},\ b_n = n^2,$

b) 0 : $\quad a_n = \dfrac{1}{n^2},\ b_n = n,$

c) a : $\quad a_n = \dfrac{1}{n},\ b_n = 2n,$

d) $\nexists$: $\quad a_n = \dfrac{\sin n}{n^2},\ b_n = n^2.$

Limita funkce

- **Prstencové (ryzí)** $\delta-$**okolí bodu** x_0: $\mathcal{P}(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$,
- **Pravé prstencové** $\delta-$**okolí bodu** x_0: $\mathcal{P}^+(x_0,\delta) = (x_0, x_0+\delta)$,
- **Levé prstencové** $\delta-$**okolí bodu** x_0: $\mathcal{P}^-(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0)$,
  $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} = (-\infty, \infty)$.

Definice (Heineho definice limity)

Řekneme, že funkce $f : y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu rovnu číslu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1. funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2. pro každou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{P}(x_0)$ s vlastností $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Pak píšeme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Použité pojmy

Limitu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

nazýváme

- **vlastní limita ve vlastním bodě**, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$.
- **nevlastní limita ve vlastním bodě**, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$.
- **vlastní limita v nevlastním bodě**, jestliže $x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$.
- **nevlastní limita v nevlastním bodě**, jestliže $x_0 = \pm\infty$ a $L = \pm\infty$.

Definice (Cauchyho definice limity)

Funkce $f : y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0)$ splňující podmínku $0 < |x - x_0| < \delta$ platí nerovnost $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pak píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Definice (Jednostranná limita)

Číslo $L \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **limitou zprava** funkce $f : y = f(x)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1. funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}^+(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2. pro každou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{P}^+(x_0)$, $(x_n) \to x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Pak píšeme

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = f(x_0^+).$$

Definice (Jednostranná limita)

Číslo $L \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **limitou zleva** funkce $f : y = f(x)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1. funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2. pro každou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{P}^-(x_0)$, $(x_n) \to x_0$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Pak píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = f(x_0^-).$$

Věta (Existence limity)

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 limitu $L \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity a ty jsou si rovny, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Poznámka

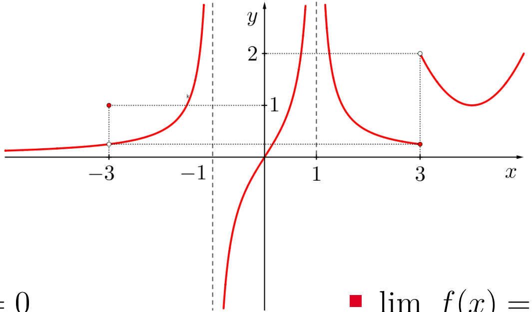
Limita neexistuje, jestliže

- *neexistuje některá (nebo obě) jednostranné limity,*
- *jednostranné limity jsou různé.*

Toho lze výhodně využít při důkazu neexistence limity.

Limita funkce

Funkce f zadaná grafem, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \dfrac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ neexistuje, neboť
  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$,
  $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ neexistuje, neboť
  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \dfrac{1}{4}$,
  $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Spojitost funkce

- $\delta-$**okolí bodu** x_0: $\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
- **Pravé** $\delta-$**okolí bodu** x_0: $\mathcal{U}^+(x_0, \delta) = \langle x_0, x_0 + \delta)$,
- **Levé** $\delta-$**okolí bodu** x_0: $\mathcal{U}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0\rangle$,

  $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,

Definice

Funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

a) f je definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Spojitost funkce

Definice

Funkce f je **spojitá zprava v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

a) f je definovaná v pravém okolí $\mathcal{U}^+(x_0)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Definice

Funkce f je **spojitá zleva v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

a) f je definovaná v levém okolí $\mathcal{U}^-(x_0)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Definice

Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** $(a, b) \subseteq D(f)$, je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.
Funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$, je-li spojitá v intervalu (a, b) a současně je spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b.

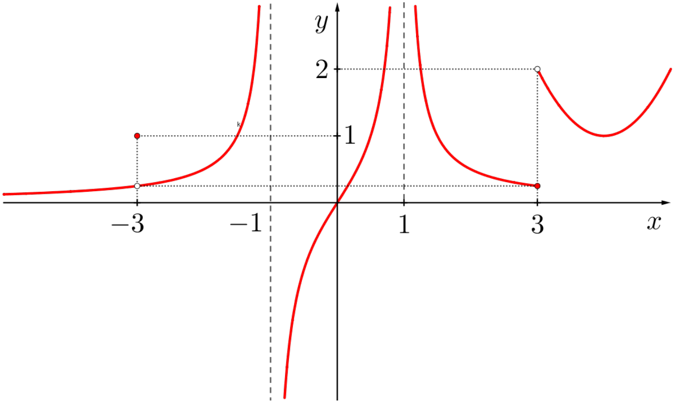
Definice (Body nespojitosti)

Bod x_0, ve kterém není funkce f spojitá, nazýváme **bodem nespojistosti**. Máme tyto druhy nespojitosti v bodě x_0:

- **Nespojitost prvního druhu**
  (i) **odstranitelná nespojitost**, pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ a $f(x_0) \neq L$.
  (ii) **skok**, pokud $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = b$ $(a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b)$.
- **Nespojitost druhého druhu**, pokud není bod x_0 nespojitostí prvního druhu (tj. alespoň jedna z jednostranných limit je nevlastní nebo neexistuje).

Spojitost funkce

Funkce f zadaná grafem



- má body nespojitosti $-3, -1, 1, 3$
  - body odstranitelné nespojitosti -3
  - body neodstranitelné nespojitosti $-1, 1, 3$
- v bodě 3 je spojitá zleva

Věta (Pravidla pro počítání s limitami)

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2, x_0 \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{R}$, *pak pokud má pravá strana rovnosti smysl, platí:*

- $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \cdot L_1$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, *pro* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, *platí uvedená tvrzení i pro jednostranné limity*

Postup při výpočtu limity:
Při výpočtu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, vždy nejprve dosadíme bod x_0 (nebo hodnoty z jeho okolí) do předpisu funkce a snažíme se určit limitu jako hodnotu funkce v bodě x_0 (nebo v jeho okolí).

Věta (Limita typu $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$)

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \neq 0$ *a* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Existuje-li prstencové okolí bodu* x_0, *takové, že pro každé* x *z tohoto okolí platí*

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad$ *pak* $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty,$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad$ *pak* $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$

- → Věta platí i pro jednostranné okolí a limity.
- → Při výpočtu limity typu $\left\|\frac{k}{0}\right\|$, kde $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ je potřeba určit **obě jednostranné limity** a zjisit, zda jsou si rovny. Pokud ne, limita neexistuje.

Věta (Limita složené funkce)

Mějme složenou funkci $h = f(g) = f \circ g$, *tj.* $h(x) = f(g(x))$, *přičemž* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$, $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = b$, *kde* $x_0, u_0, b \in \mathbb{R}^*$. *Pak platí:*

a) *Existuje-li prstencové okolí* $\mathcal{P}(x_0)$ *bodu* x_0 *takové, že pro všechna* $x \in \mathcal{P}(x_0)$ *je* $g(x) \neq u_0$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = b$

b) *Je-li funkce* f *spojitá v bodě* u_0, *tj.* $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = b$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)) = f(u_0) = b$.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, *platí uvedená tvrzení i pro jednostranné limity.*

Příklad 10.4

Vypočítejte limity funkcí

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1)$,

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$,

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 5x + 2}$,

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 1}$,

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 1}{x + 2}$,

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln \frac{x + 1}{x + 2}$.

Příklad 10.5

Vypočítejte limity funkcí

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-3}{(x-1)^2}$,

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x + 1)$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$,

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, kde $f : x^2$, pro $x \in \mathbb{R} - \{2\} \wedge f(2) = 10$.

Děkuji za pozornost!