Příklad 12.1

Vypočítejte derivace vyšších řádů funkce $f(x) = 2x^5$.

$$y = 2x^5$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y' = 2 \cdot 5 \cdot x^4 = 10x^4$$

$$y'' = 10 \cdot 4 \cdot x^3 = 40x^3$$

$$y''' = 120x^2$$

$$y^{(4)} = 240x$$

$$y^{(5)} = 240$$

$$y^{(6)} = 0, \quad y^{(7)} = 0, \ldots$$

Příklad 12.2 [viz Příklad 11.3.g]

Vypočítejte druhou derivaci funkce $f(x) = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$ a výsledek upravte.

$$f'(x) = \cdots = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$$ (viz minulá přednáška)

$$f''(x) = \frac{2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\sin^3 x - \cos^2 x\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x}{(\sin^3 x)^2}$$

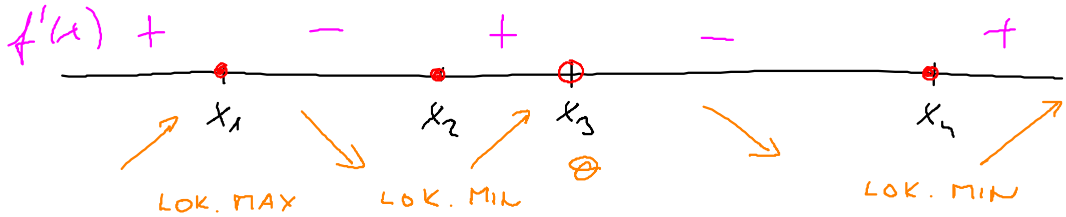
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{-2\sin^{\cancel{4}\,2} x\cos x - 3\cancel{\sin^2 x}\cos^3 x}{\sin^{\cancel{6}\,4} x} = \frac{-\cos x\,(2\sin^2 x + 3\cos^2 x)}{\sin^4 x} =$$

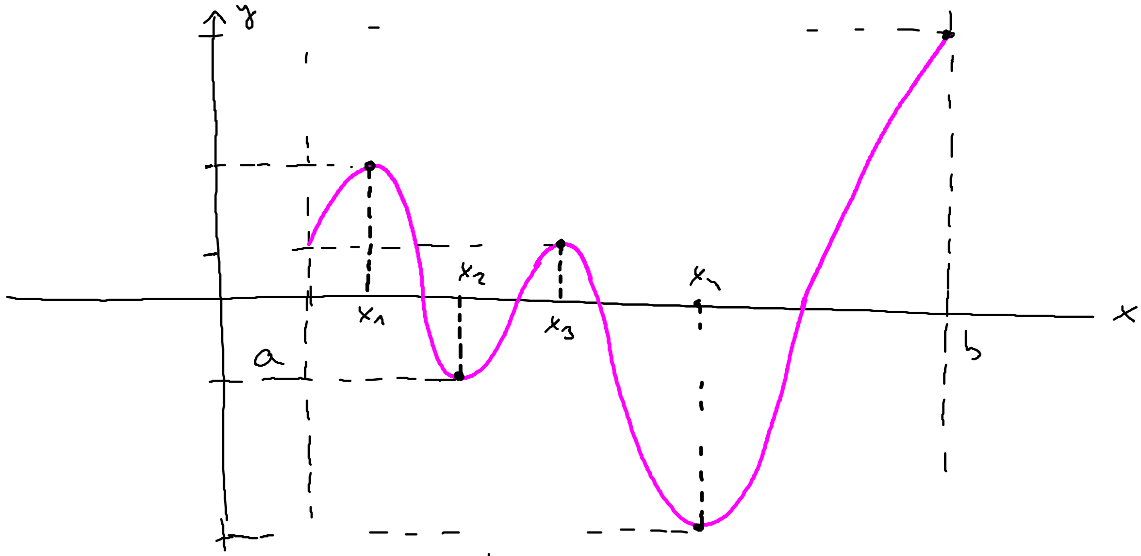
$$= \frac{-\cos x\,(2\sin^2 x + 3 - 3\sin^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{-\cos x\,(3 - \sin^2 x)}{\sin^4 x}$$

POZNÁMKA 1

Př $f(x) \ldots \qquad f'(x) = \ldots = 0$



POZNÁMKA 2:



globální maximum: b

globální minimum: x_4

Příklad 12.~~2~~ 3

Užitím L'Hospitalova pravidla najděte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$,

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{LP}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

c) $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) \left|\infty - \infty\right| = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot \ln x} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{LP}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 - \overset{x^{-1}}{\frac{1}{x}}}{\ln x + \underbrace{(x-1)\cdot \frac{1}{x}}_{1-\frac{1}{x}}} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{LP}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Příklad 12.~~3~~4

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}.$$

viz. přednáška

Příklad 12.4 ♣

Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = x^2 e^{-\frac{3}{x}}.$$

$y = x^2 e^{-\frac{3}{x}}$

I) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

sgn y $\qquad + \qquad 0 \qquad +$

není S, není L $\qquad f(-x) = (-x)^2 e^{-\frac{3}{(-x)}} = x^2 e^{\frac{3}{x}} \neq f(x)$
$\neq -f(x)$

II) $y' = 2x\, e^{-\frac{3}{x}} + x^2 e^{-\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{x^2} = e^{-\frac{3}{x}}(2x+3) = 0$ $\qquad D(y') = \mathbb{R} - \{0\} = D(y)$

sgn y' $\qquad - \quad -\frac{3}{2} \quad + \quad 0 \quad +$

$\searrow \qquad \nearrow \qquad \nearrow$

lok. MIN $\qquad y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} e^{2}$

III) $y'' = e^{-\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{x^2} \cdot (2x+3) + e^{-\frac{3}{x}}\, 2 = e^{-\frac{3}{x}} \left(\frac{2x^2+6x+9}{x^2} \right) = 0$ $\qquad D(y'') = \mathbb{R} - \{0\}$

sgn y'' $\qquad + \quad 0 \quad +$

$\cup \qquad \cup$

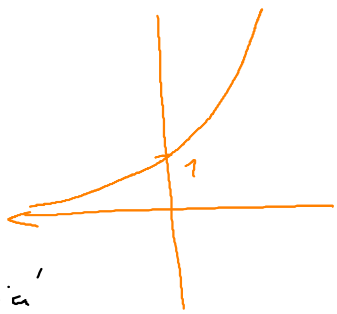
IV) i) bez směrnice

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 \cdot e^{-\frac{3}{x}} \; |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{3}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{\cancel{x^2}}}{-\frac{2}{x^{\cancel{3}}}} =$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{3}{x}}}{\frac{1}{x}} \left|\frac{\infty}{-\infty}\right| \overset{LP}{=} -\frac{3}{2} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} = \frac{9}{2} \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{3}{x}} =$$

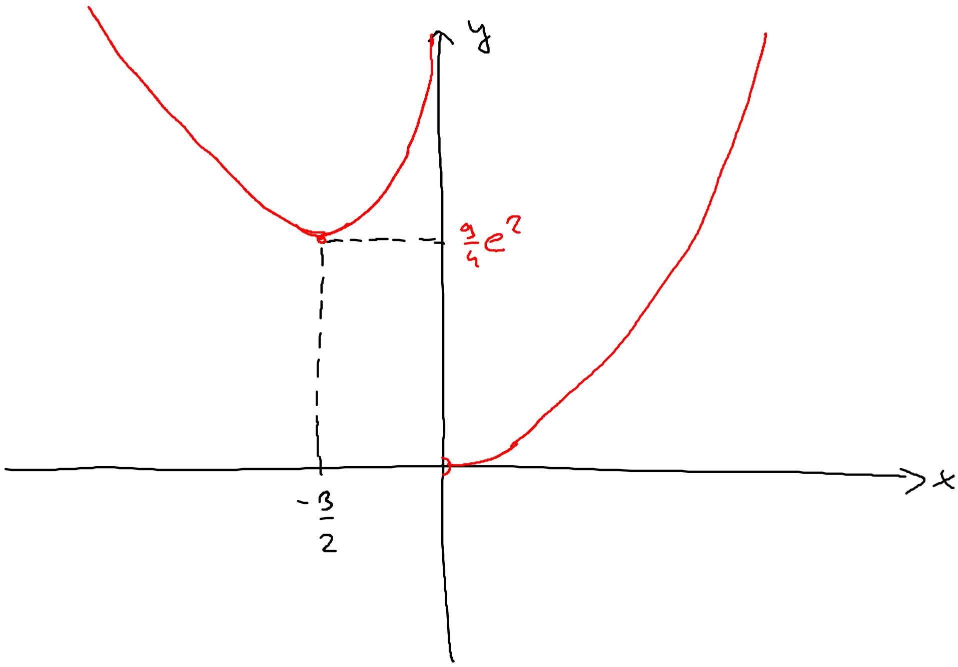
$= \infty \implies \exists$ as. bez směrnice

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot e^{-\frac{3}{x}} \; |0\cdot 0| = 0$$



ii) $a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\cancel{2}} e^{-\frac{3}{x}}}{\cancel{x}} = \infty$ $\qquad \nexists$ as. se směrnicí

$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{2}} e^{-\frac{3}{x}}}{\cancel{x}} = -\infty$ $\qquad \nexists$ as $\qquad$ "



y
$\frac{9}{4}e^2$
$-\frac{3}{2}$
x