BAA009 Matematika 2 (G)

Cvičení č. 9

2. zápočtová písemka

Příklad 9.1. Určete první, druhou a třetí parciální derivaci v bodě $A = [0, ?]$ funkce $y = f(x)$, která je dána implicitní rovnicí $F : y^3 - xy - 8 = 0$.

$$[\ y'(A) = \frac{1}{6},\ y''(A) = 0,\ y'''(A) = -\frac{1}{432}\ ]$$

IMPLICITNÍ FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ $F(x,y)=0$

$f: y=f(x) \Rightarrow F(x, f(x))=0$

DERIVACE : a) $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$; $F'_y \neq 0$

b) CELÝ PŘEDPIS DERIVUJEME PODLE x A NA y SE DÍVÁME JAKO NA FUNKCI y(x) (TEDY PROMĚNNÉ x)

$F: y^3 - xy - 8 = 0$, $A=[0,?] \longrightarrow A=[0,2]$

POUŽIJEME b)

$f': \ 3y^2y' - y - xy' = 0$

$y'(3y^2 - x) = y$

$y' = \frac{y}{3y^2 - x}$

$y'(A) = \frac{2}{3\cdot 4 - 0} = \frac{1}{6}$

$f'': \ 3\cdot 2yy'y' + 3y^2y'' - y' - y' - xy'' = 0$

$6yy'^2 + 3y^2y'' - 2y' - xy'' = 0$

$y''(3y^2 - x) = 2y' - 6yy'^2$

*

$$y'' = \frac{2y' - 6yy'^2}{3y^2 - x}$$

$$y''(1) = \frac{\frac{2}{6} - \frac{6\cdot 2}{66}}{\dots} = 0$$

$$f''': \quad 6y'y'^2 + 6y\,2y'y'' + 3\cdot 2\,yy'y'' + 3y^2y''' - 2y'' - y'' - xy''' = 0$$

$$6y'^3 + 18yy'y'' + 3y^2y''' - 3y'' - xy''' = 0$$

$$y'''(3y^2 - x) = 3y'' - 6y'^3 - 18yy'y''$$

$$y''' = \frac{3y'' - 6y'^3 - 18yy'y''}{3y^2 - x}$$

$$y'''(1) = \frac{0 - 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 0}{3\cdot 4 - 0} = -\frac{1}{432}$$

Příklad 9.2. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu v bodě $A = [1, -6, 0]$ funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitní rovnicí $F : e^z + x^2y + z + 5 = 0$.

$$[\ z'_x(A) = 6,\ z'_y(A) = -\frac{1}{2}\ ]$$

IMPLICITNÍ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH $F(x, y, z) = 0$

$z = f(x, y) \implies F(x, y, f(x, y)) = 0$

$$f'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \quad ; \quad f'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \quad ; \quad F'_z(A) \neq 0$$

$F: \ e^z + x^2y + z + 5 = 0$, $A = [1, -6, 0]$

$$F'_x = 0 + 2xy + 0 + 0 = 2xy$$
$$F'_y = 0 + x^2 + 0 + 0 = x^2$$
$$F'_z = e^z + 0 + 1 + 0 = e^z + 1$$

$$f'_x = -\frac{2xy}{e^z + 1} \qquad f'_x(A) = -\frac{2 \cdot 1(-6)}{e^0 + 1} = \underline{\underline{6}}$$

$$f'_y = -\frac{x^2}{e^z + 1} \qquad f'_y(A) = -\frac{1}{e^0 + 1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$