Příklad. Určete Taylorův polynom druhého stupně pro funkci $f: \ z = \dfrac{y^2}{x^2}$ v bodě $A = [-1, 2]$.

Komentář. Taylorův polynom $n-$tého stupně pro funkci $z = f(x, y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ je daný vzorcem

$$T_n(X) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k f(A)(X),$$

kde $\mathrm{d}^k f(A)(X)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ značí tzv. *totální diferenciál k-tého řádu funkce* $z = f(x, y)$ *v daném bodě* A *na směr* $X - A = (x - a_1, y - a_2)$.

Komentář. Taylorův polynom $n-$tého stupně pro funkci $z = f(x, y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ je daný vzorcem

$$T_n(X) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k f(A)(X),$$

kde $\mathrm{d}^k f(A)(X)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ značí tzv. *totální diferenciál k-tého řádu funkce* $z = f(x, y)$ *v daném bodě* A *na směr* $X - A = (x - a_1, y - a_2)$.

Speciálně pro $n = 1$, resp. $n = 2$ nebo $n = 3$ dostáváme:

Komentář. Taylorův polynom $n-$tého stupně pro funkci $z = f(x, y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ je daný vzorcem

$$T_n(X) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{d}^k f(A)(X),$$

kde $\mathrm{d}^k f(A)(X)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ značí tzv. *totální diferenciál k-tého řádu funkce* $z = f(x, y)$ *v daném bodě* A *na směr* $X - A = (x - a_1, y - a_2)$.

Speciálně pro $n = 1$, resp. $n = 2$ nebo $n = 3$ dostáváme:

$$\begin{aligned} T_1(X) &= f(A) + \mathrm{d}f(A)(X), \quad T_2(X) = f(A) + \mathrm{d}f(A)(X) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(A)(X), \\ T_3(X) &= f(A) + \mathrm{d}f(A)(X) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(A)(X) + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f(A)(X), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(A)(X) &= f'_x(A) \cdot (x - a_1) + f'_y(A) \cdot (y - a_2), \\ \mathrm{d}^2 f(A)(X) &= f''_{xx}(A) \cdot (x - a_1)^2 + 2f''_{xy}(A) \cdot (x - a_1) \cdot (y - a_2) + f''_{yy}(A) \cdot (y - a_2)^2, \\ \mathrm{d}^3 f(A)(X) &= f'''_{xxx}(A) \cdot (x - a_1)^3 + 3f'''_{xxy}(A) \cdot (x - a_1)^2 \cdot (y - a_2) + \\ &\quad + 3f'''_{xyy}(A) \cdot (x - a_1) \cdot (y - a_2)^2 + f'''_{yyy}(A) \cdot (y - a_2)^3. \end{aligned}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \boxed{}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) \; = \; -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) \quad = \quad \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v daném bodě:

$$f''_{xx}(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A=[-1,2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2\cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2\cdot\left(x^{-2}\right)'_x = y^2\cdot\left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A)=8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2}\cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2}\cdot\left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2}\cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A)=4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2\cdot\left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) \; = \; -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) \quad = \quad \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) \quad = \quad \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = \; -\, 2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) \quad = \quad \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \; -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) = \left(f'_y(X)\right)'_y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A=[-1,2]$:

$$
\begin{aligned}
f'_x(X) &= \left(y^2\cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2\cdot\left(x^{-2}\right)'_x = y^2\cdot\left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A)=8;\\
f'_y(X) &= \left(\frac{1}{x^2}\cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2}\cdot\left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2}\cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A)=4.
\end{aligned}
$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(X) &= \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2\cdot\left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A)=24;\\
f''_{xy}(X) &= \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3}\cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3}\cdot\left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A)=8;\\
f''_{yy}(X) &= \left(f'_y(X)\right)'_y = \left(\frac{2}{x^2}\cdot y\right)'_y \overset{(?)}{=}
\end{aligned}
$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$
\begin{aligned}
f'_x(X) &= \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;\\
f'_y(X) &= \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.
\end{aligned}
$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(X) &= \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;\\
f''_{xy}(X) &= \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;\\
f''_{yy}(X) &= \left(f'_y(X)\right)'_y = \left(\frac{2}{x^2} \cdot y\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{2}{x^2} \cdot (y)'_y = \frac{2}{x^2}
\end{aligned}
$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) \quad = \quad \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) \quad = \quad \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) \quad = \quad \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) \quad = \quad \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) \quad = \quad \left(f'_y(X)\right)'_y = \left(\frac{2}{x^2} \cdot y\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{2}{x^2} \cdot (y)'_y = \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''_{yy}(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \overset{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \overset{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) = \left(f'_y(X)\right)'_y = \left(\frac{2}{x^2} \cdot y\right)'_y \overset{(?)}{=} \frac{2}{x^2} \cdot (y)'_y = \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''_{yy}(A) = 2.$$

Dílčí shrnutí: $f(A) = 4,$ $f'_x(A) = 8,\ f'_y(A) = 4,$ $f''_{xx}(A) = 24,\ f''_{xy}(A) = 8,\ f''_{yy}(A) = 2.$

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$T_2(X) \quad =$$

Dílčí shrnutí: $f(A) = 4,$ $f'_x(A) = 8,\ f'_y(A) = 4,$ $f''_{xx}(A) = 24,\ f''_{xy}(A) = 8,\ f''_{yy}(A) = 2.$

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$
\begin{aligned}
T_2(X) &= \boxed{4} + \boxed{8}(x+1) + \boxed{4}(y-2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\boxed{24}(x+1)^2 + 2\cdot\boxed{8}(x+1)(y-2) + \boxed{2}(y-2)^2\right] = \\
&=
\end{aligned}
$$

Dílčí shrnutí: $\boxed{f(A) = 4,}$ $\boxed{f'_x(A) = 8,\ f'_y(A) = 4,}$ $\boxed{f''_{xx}(A) = 24,\ f''_{xy}(A) = 8,\ f''_{yy}(A) = 2.}$

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$
\begin{aligned}
T_2(X) &= \boxed{4} + \boxed{8}(x+1) + \boxed{4}(y-2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\boxed{24}(x+1)^2 + 2\cdot\boxed{8}(x+1)(y-2) + \boxed{2}(y-2)^2\right] = \\
&= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + 12(x+1)^2 + 8(x+1)(y-2) + (y-2)^2 = \\
&=
\end{aligned}
$$

Dílčí shrnutí: $f(A) = 4,$ $f'_x(A) = 8,\ f'_y(A) = 4,$ $f''_{xx}(A) = 24,\ f''_{xy}(A) = 8,\ f''_{yy}(A) = 2.$

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$\begin{aligned}
T_2(X) &= \boxed{4} + \boxed{8}(x+1) + \boxed{4}(y-2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\boxed{24}(x+1)^2 + 2\cdot\boxed{8}(x+1)(y-2) + \boxed{2}(y-2)^2\right] = \\
&= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + 12(x+1)^2 + 8(x+1)(y-2) + (y-2)^2 = \\
&= \underline{\underline{4 + 16\,x + 8\,y + 12\,x^2 + 8\,xy + y^2}}.
\end{aligned}$$