Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}.$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0.$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně“* :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"*:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) \quad = \quad \left(\frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z} \cdot x\right)'_x - \left(\ln \frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) \quad = \quad \left(\frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z} \cdot x\right)'_x - \left(\ln \frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=} \frac{1}{z}\,(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) \quad = \quad \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z}\cdot x\right)'_x - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=} \frac{1}{z}\,(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) \quad = \quad \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(???)}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z} \cdot x\right)'_x - \left(\ln \frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=} \frac{1}{z}\,(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}\right)'_y \overset{(???)}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_y - \left(\ln \frac{z}{y}\right)'_y \overset{(?!)}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"*:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z}\cdot x\right)'_x - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=} \frac{1}{z}(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(???)}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_y - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(?!)}{=} 0 - \frac{y}{z}\cdot\left(z\cdot y^{-1}\right)'_y \overset{(!)}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x,y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"*:

$$F(x,y,z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x,y,z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z}\cdot x\right)'_x - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=} \frac{1}{z}(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(???)}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_y - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(?!)}{=} 0 - \frac{y}{z}\cdot\left(z\cdot y^{-1}\right)'_y \overset{(!)}{=} -\frac{y}{z}\cdot z\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y};$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z}\cdot x\right)'_x - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=} \frac{1}{z}\,(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(???)}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_y - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(?!)}{=} 0 - \frac{y}{z}\cdot\left(z\cdot y^{-1}\right)'_y \overset{(!)}{=} -\frac{y}{z}\cdot z\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y};$$

$$F'_z(x, y, z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_z \overset{(!?)}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"*:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{\boxed{(?)}}{=} \left(\frac{1}{z}\cdot x\right)'_x - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{\boxed{(??)}}{=} \frac{1}{z}(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{\boxed{(???)}}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_y - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{\boxed{(?!)}}{=} 0 - \frac{y}{z}\cdot\left(z\cdot y^{-1}\right)'_y \overset{\boxed{(!)}}{=} -\frac{y}{z}\cdot z\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y};$$

$$F'_z(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_z \overset{\boxed{(!?)}}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_z - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_z \overset{\boxed{(!??)}}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x,y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně"* :

$$F(x,y,z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x,y,z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(?)}{=} \left(\frac{1}{z}\cdot x\right)'_x - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{(??)}{=} \frac{1}{z}\,(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(???)}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_y - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{(?!)}{=} 0 - \frac{y}{z}\cdot\left(z\cdot y^{-1}\right)'_y \overset{(!)}{=} -\frac{y}{z}\cdot z\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y};$$

$$F'_z(x,y,z) = \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_z \overset{(!?)}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_z - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_z \overset{(!??)}{=} x\cdot\left(z^{-1}\right)'_z - \frac{y}{z}\cdot\left(\frac{1}{y}\cdot z\right)'_z =$$

$$= x\cdot\left(-z^{-2}\right) - \frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y} \overset{(!???)}{=}$$

Příklad. Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}. \tag{1}$$

Řešení. Danou rovnici (1) převedeme na tvar *„levá strana je rovna nulové pravé straně“*:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0. \tag{2}$$

Funkci tří proměnných $F(x, y, z)$ danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$
\begin{aligned}
F'_x(x, y, z) &= \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{\boxed{(?)}}{=} \left(\frac{1}{z}\cdot x\right)'_x - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_x \overset{\boxed{(??)}}{=} \frac{1}{z}\,(x)'_x - 0 = \frac{1}{z};\\
F'_y(x, y, z) &= \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{\boxed{(???)}}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_y - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_y \overset{\boxed{(?!)}}{=} 0 - \frac{y}{z}\cdot\left(z\cdot y^{-1}\right)'_y \overset{\boxed{(!)}}{=} -\frac{y}{z}\cdot z\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y};\\
F'_z(x, y, z) &= \left(\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}\right)'_z \overset{\boxed{(!?)}}{=} \left(\frac{x}{z}\right)'_z - \left(\ln\frac{z}{y}\right)'_z \overset{\boxed{(!??)}}{=} x\cdot\left(z^{-1}\right)'_z - \frac{y}{z}\cdot\left(\frac{1}{y}\cdot z\right)'_z =\\
&= x\cdot\left(-z^{-2}\right) - \frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y} \overset{\boxed{(!???)}}{=} -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} = -\frac{x+z}{z^2}.
\end{aligned}
$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce $z = f(x, y)$:

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce $z = f(x, y)$:

$$z'_x \quad = \quad -\frac{F'_x}{F'_z} =$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce $z = f(x, y)$:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} =$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce $z = f(x, y)$:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z},$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce $z = f(x, y)$:

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y}{F'_z} = \end{aligned}$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce $z = f(x, y)$:

$$
\begin{aligned}
z'_x &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z}, \\
z'_y &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}} =
\end{aligned}
$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce $z = f(x,y)$:

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z^2}{y(x+z)}. \end{aligned}$$