Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l} F'_x(A_1) = 4 \qquad & F'_x(A_2) = 4 \end{array}$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l} F'_x(A_1) = 4 & F'_x(A_2) = 4 \\ F'_y(A_1) = -12 & F'_y(A_2) = -12 \end{array}$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l} F'_x(A_1) = 4 & F'_x(A_2) = 4 \\ F'_y(A_1) = -12 & F'_y(A_2) = -12 \\ F'_z(A_1) = 6 & F'_z(A_2) = -6 \end{array}$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l} F'_x(A_1) = 4 & F'_x(A_2) = 4 \\ F'_y(A_1) = -12 & F'_y(A_2) = -12 \\ F'_z(A_1) = 6 & F'_z(A_2) = -6 \end{array}$$

$$\tau_1 : \; 4(x-2) - 12(y+6) + 6(z-3) = 0, \quad 2x - 6y + 3z - 49 = 0$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l}
F'_x(A_1) = 4 & F'_x(A_2) = 4 \\
F'_y(A_1) = -12 & F'_y(A_2) = -12 \\
F'_z(A_1) = 6 & F'_z(A_2) = -6
\end{array}$$

$$\tau_1 : \ 4(x-2) - 12(y+6) + 6(z-3) = 0, \quad 2x - 6y + 3z - 49 = 0$$
$$\tau_2 : \ 4(x-2) - 12(y+6) - 6(z+3) = 0, \quad 2x - 6y - 3z - 49 = 0$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l} F'_x(A_1) = 4 & F'_x(A_2) = 4 \\ F'_y(A_1) = -12 & F'_y(A_2) = -12 \\ F'_z(A_1) = 6 & F'_z(A_2) = -6 \end{array}$$

$$\tau_1 : \ 4(x - 2) - 12(y + 6) + 6(z - 3) = 0, \quad 2x - 6y + 3z - 49 = 0$$
$$\tau_2 : \ 4(x - 2) - 12(y + 6) - 6(z + 3) = 0, \quad 2x - 6y - 3z - 49 = 0$$

$$n_1 \quad : \quad x = 2 + 4t,\ y = -6 - 12t,\ z = 3 + 6t,\ t \in \mathbf{R}$$

Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

Řešení. $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l} F'_x(A_1) = 4 & F'_x(A_2) = 4 \\ F'_y(A_1) = -12 & F'_y(A_2) = -12 \\ F'_z(A_1) = 6 & F'_z(A_2) = -6 \end{array}$$

$$\tau_1 : 4(x-2) - 12(y+6) + 6(z-3) = 0, \quad 2x - 6y + 3z - 49 = 0$$
$$\tau_2 : 4(x-2) - 12(y+6) - 6(z+3) = 0, \quad 2x - 6y - 3z - 49 = 0$$

$$n_1 \quad : \quad x = 2 + 4t,\ y = -6 - 12t,\ z = 3 + 6t,\ t \in \mathbf{R}$$
$$n_2 \quad : \quad x = 2 + 4t,\ y = -6 - 12t,\ z = -3 - 6t,\ t \in \mathbf{R}$$

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy.

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$.

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku:

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

♣ Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ je dána rovnicí

$$\tau : \; z = a_3 + f'_x(a_1, a_2)\,(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{1}$$

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

♣ Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ je dána rovnicí

$$\tau : \; z = a_3 + f'_x(a_1, a_2)\,(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{1}$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána implicitně pomocí funkce $u = F(x, y, z)$, víme, že parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[a_1, a_2]$ počítáme podle vzorců

$$z'_x(a_1, a_2) = -\frac{F'_x(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)},$$

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

♣ Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ je dána rovnicí

$$\tau: \; z = a_3 + f'_x(a_1, a_2)\,(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{1}$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána implicitně pomocí funkce $u = F(x, y, z)$, víme, že parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[a_1, a_2]$ počítáme podle vzorců

$$z'_x(a_1, a_2) = -\frac{F'_x(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \quad z'_y(a_1, a_2) = -\frac{F'_y(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \tag{2}$$

kde $a_3 = f(a_1, a_2)$.

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

♣ Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ je dána rovnicí

$$\tau : \ z = a_3 + f'_x(a_1, a_2)\,(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{1}$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána implicitně pomocí funkce $u = F(x, y, z)$, víme, že parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[a_1, a_2]$ počítáme podle vzorců

$$z'_x(a_1, a_2) = -\frac{F'_x(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \quad z'_y(a_1, a_2) = -\frac{F'_y(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \tag{2}$$

kde $a_3 = f(a_1, a_2)$. Dosadíme-li z (2) do (1), dostáváme po úpravě vzorec

$$\tau : \ F'_x(A) \cdot (x - a_1) + F'_y(A) \cdot (y - a_2) + F'_z(A) \cdot (z - a_3) = 0,$$

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

♣ Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ je dána rovnicí

$$\tau : \; z = a_3 + f'_x(a_1, a_2)\,(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{1}$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána implicitně pomocí funkce $u = F(x, y, z)$, víme, že parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[a_1, a_2]$ počítáme podle vzorců

$$z'_x(a_1, a_2) = -\frac{F'_x(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \quad z'_y(a_1, a_2) = -\frac{F'_y(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \tag{2}$$

kde $a_3 = f(a_1, a_2)$. Dosadíme-li z (2) do (1), dostáváme po úpravě vzorec

$$\tau : \; F'_x(A) \cdot (x - a_1) + F'_y(A) \cdot (y - a_2) + F'_z(A) \cdot (z - a_3) = 0, \tag{3}$$

t.j. *vzorec pro rovnici tečné roviny v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ plochy $z = f(x, y)$ implicitně dané rovnicí $F(x, y, z) = 0$.*

Komentář. Bod A je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

♣ Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ je dána rovnicí

$$\tau : \ z = a_3 + f'_x(a_1, a_2)\,(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{1}$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána implicitně pomocí funkce $u = F(x, y, z)$, víme, že parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[a_1, a_2]$ počítáme podle vzorců

$$z'_x(a_1, a_2) = -\frac{F'_x(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \quad z'_y(a_1, a_2) = -\frac{F'_y(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \tag{2}$$

kde $a_3 = f(a_1, a_2)$. Dosadíme-li z (2) do (1), dostáváme po úpravě vzorec

$$\tau : \ F'_x(A) \cdot (x - a_1) + F'_y(A) \cdot (y - a_2) + F'_z(A) \cdot (z - a_3) = 0, \tag{3}$$

t.j. *vzorec pro rovnici tečné roviny v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ plochy $z = f(x, y)$ implicitně dané rovnicí $F(x, y, z) = 0$.*

Poznámka: Je vidět, že aby bylo zadání korektní, tedy bod A byl skutečně bodem dané plochy, nutně musí platit $F(A) = 0$.

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ.

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

$$\vec{n}_\tau = F'_x(A) \cdot \vec{i} + F'_y(A) \cdot \vec{j} + F'_z(A) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: \; ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

$$\vec{n}_\tau = F'_x(A) \cdot \vec{i} + F'_y(A) \cdot \vec{j} + F'_z(A) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

Přímka $p \subset \mathbf{E}_3$ určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrizaci:

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: \; ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

$$\vec{n}_\tau = F'_x(A) \cdot \vec{i} + F'_y(A) \cdot \vec{j} + F'_z(A) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

Přímka $p \subset \mathbf{E}_3$ určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrizaci:

$$x = a_1 + t \cdot s_1,$$

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho:\ ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

$$\vec{n}_\tau = F'_x(A) \cdot \vec{i} + F'_y(A) \cdot \vec{j} + F'_z(A) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

Přímka $p \subset \mathbf{E}_3$ určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrizaci:

$$x = a_1 + t \cdot s_1,\ y = a_2 + t \cdot s_2,$$

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: \; ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

$$\vec{n}_\tau = F'_x(A) \cdot \vec{i} + F'_y(A) \cdot \vec{j} + F'_z(A) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

Přímka $p \subset \mathbf{E}_3$ určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrizaci:

$$x = a_1 + t \cdot s_1, \; y = a_2 + t \cdot s_2, \; z = a_3 + t \cdot s_3, \; t \in \mathbf{R}.$$

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho:\ ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

$$\vec{n}_\tau = F'_x(A) \cdot \vec{i} + F'_y(A) \cdot \vec{j} + F'_z(A) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

Přímka $p \subset \mathbf{E}_3$ určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrizaci:

$$x = a_1 + t \cdot s_1,\ y = a_2 + t \cdot s_2,\ z = a_3 + t \cdot s_3,\ t \in \mathbf{R}.$$

Protože $\vec{s}_n = \vec{n}_\tau$ (*tj. „normálový vektor tečně roviny je směrový vektor normály“*),

♠ Víme, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: \ ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny ρ. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny τ v bodě dotyku A:

$$\vec{n}_\tau = F'_x(A) \cdot \vec{i} + F'_y(A) \cdot \vec{j} + F'_z(A) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

Přímka $p \subset \mathbf{E}_3$ určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrizaci:

$$x = a_1 + t \cdot s_1, \ y = a_2 + t \cdot s_2, \ z = a_3 + t \cdot s_3, \ t \in \mathbf{R}.$$

Protože $\vec{s}_n = \vec{n}_\tau$ (*tj. „normálový vektor tečně roviny je směrový vektor normály“*), potom (4) nám dává

$$x = a_1 + t \cdot F'_x(A), \ y = a_2 + t \cdot F'_y(A), \ z = a_3 + t \cdot F'_z(A), \ t \in \mathbf{R},$$

t.j. *parametrizaci normály plochy $F(x, y, z) = 0$ v bodě A.*

[Klikni zde pro ukončení]