Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho: 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : \ 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Řešení. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála.

Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Řešení. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála. Pak platí $F(A) = 0$, a dále

$$\tau : F'_x(A)(x - a_1) + F'_y(A)(y - a_2) + F'_z(A)(z - a_3) = 0, \qquad (1)$$

kde $F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 1$.

Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : \; 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Řešení. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála. Pak platí $F(A) = 0$, a dále

$$\tau : \; F'_x(A)(x - a_1) + F'_y(A)(y - a_2) + F'_z(A)(z - a_3) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 1$. Ze splnění podmínky $A \in \tau$ dostáváme první rovnici pro neurčité a_1, a_2, a_3

$$a_1(a_2 + a_3) + a_3^2 = 1.$$

Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Řešení. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála. Pak platí $F(A) = 0$, a dále

$$\tau : F'_x(A)(x - a_1) + F'_y(A)(y - a_2) + F'_z(A)(z - a_3) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 1$. Ze splnění podmínky $A \in \tau$ dostáváme první rovnici pro neurčité a_1, a_2, a_3

$$a_1(a_2 + a_3) + a_3^2 = 1. \tag{2}$$

Protože $\rho \parallel \tau$, musí existovat nějaká, zatím neurčitá, konstanta $k \neq 0$ tak, že

$$\vec{n}_\tau = k \cdot \vec{n}_\rho,$$

Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : \ 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Řešení. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála. Pak platí $F(A) = 0$, a dále

$$\tau : \ F'_x(A)(x - a_1) + F'_y(A)(y - a_2) + F'_z(A)(z - a_3) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 1$. Ze splnění podmínky $A \in \tau$ dostáváme první rovnici pro neurčité a_1, a_2, a_3

$$a_1(a_2 + a_3) + a_3^2 = 1. \tag{2}$$

Protože $\rho \parallel \tau$, musí existovat nějaká, zatím neurčitá, konstanta $k \neq 0$ tak, že

$$\vec{n}_\tau = k \cdot \vec{n}_\rho, \tag{3}$$

kde $\vec{n}_\tau$ je normálový vektor roviny τ a $\vec{n}_\rho$ je normálový vektor roviny ρ.

Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Řešení. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála. Pak platí $F(A) = 0$, a dále

$$\tau : F'_x(A)(x - a_1) + F'_y(A)(y - a_2) + F'_z(A)(z - a_3) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 1$. Ze splnění podmínky $A \in \tau$ dostáváme první rovnici pro neurčité a_1, a_2, a_3

$$a_1(a_2 + a_3) + a_3^2 = 1. \tag{2}$$

Protože $\rho \parallel \tau$, musí existovat nějaká, zatím neurčitá, konstanta $k \neq 0$ tak, že

$$\vec{n}_\tau = k \cdot \vec{n}_\rho, \tag{3}$$

kde $\vec{n}_\tau$ je normálový vektor roviny τ a $\vec{n}_\rho$ je normálový vektor roviny ρ. Rozepíšeme-li rovnost (2) v souřadnicích, dostáváme soustavu rovnic

Příklad. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x(y + z) + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho :\ 3x - 2y + 6z = 2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

Řešení. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála. Pak platí $F(A) = 0$, a dále

$$\tau :\ F'_x(A)(x - a_1) + F'_y(A)(y - a_2) + F'_z(A)(z - a_3) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 1$. Ze splnění podmínky $A \in \tau$ dostáváme první rovnici pro neurčité a_1, a_2, a_3

$$a_1(a_2 + a_3) + a_3^2 = 1. \tag{2}$$

Protože $\rho \parallel \tau$, musí existovat nějaká, zatím neurčitá, konstanta $k \neq 0$ tak, že

$$\vec{n}_\tau = k \cdot \vec{n}_\rho, \tag{3}$$

kde $\vec{n}_\tau$ je normálový vektor roviny τ a $\vec{n}_\rho$ je normálový vektor roviny ρ. Rozepíšeme-li rovnost (2) v souřadnicích, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 3k \\ a_1 &= -2k \\ a_1 + 2a_3 &= 6k \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$,

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k.$$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k,

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$.

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2 = \left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$.

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2 = \left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$. Pak platí

$$\tau_1 :\ 3x - 2y + 6z - 2\sqrt{10} = 0,$$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2 = \left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$. Pak platí

$$\tau_1 : 3x - 2y + 6z - 2\sqrt{10} = 0, \quad \tau_2 : 3x - 2y + 6z + 2\sqrt{10} = 0$$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\; a_2 = -k,\; a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2 = \left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$. Pak platí

$$\tau_1 : 3x - 2y + 6z - 2\sqrt{10} = 0, \quad \tau_2 : 3x - 2y + 6z + 2\sqrt{10} = 0$$

kde využíváme $\tau \perp \vec{n}_\rho$,

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2 = \left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$. Pak platí

$$\tau_1 : 3x - 2y + 6z - 2\sqrt{10} = 0, \quad \tau_2 : 3x - 2y + 6z + 2\sqrt{10} = 0$$

kde využíváme $\tau \perp \vec{n}_\rho$, a dále

$$n_1 \quad : \quad x = -\frac{\sqrt{10}}{5} + 3t, y = -\frac{\sqrt{10}}{10} - 2t, z = \frac{2\sqrt{10}}{5} + 6t, \quad t \in \mathbf{R};$$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2 = \left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$. Pak platí

$$\tau_1 : 3x - 2y + 6z - 2\sqrt{10} = 0, \quad \tau_2 : 3x - 2y + 6z + 2\sqrt{10} = 0$$

kde využíváme $\tau \perp \vec{n}_\rho$, a dále

$$\begin{aligned} n_1 \quad &: \quad x = -\frac{\sqrt{10}}{5} + 3t, y = -\frac{\sqrt{10}}{10} - 2t, z = \frac{2\sqrt{10}}{5} + 6t, \quad t \in \mathbf{R}; \\ n_2 \quad &: \quad x = \frac{\sqrt{10}}{5} + 3t, y = \frac{\sqrt{10}}{10} - 2t, z = -\frac{2\sqrt{10}}{5} + 6t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$, a po úpravě máme

$$a_1 = -2k,\ a_2 = -k,\ a_3 = 4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2 = \left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$. Pak platí

$$\tau_1 : 3x - 2y + 6z - 2\sqrt{10} = 0, \quad \tau_2 : 3x - 2y + 6z + 2\sqrt{10} = 0$$

kde využíváme $\tau \perp \vec{n}_\rho$, a dále

$$\begin{aligned} n_1 \quad &: \quad x = -\frac{\sqrt{10}}{5} + 3t, y = -\frac{\sqrt{10}}{10} - 2t, z = \frac{2\sqrt{10}}{5} + 6t, \quad t \in \mathbf{R}; \\ n_2 \quad &: \quad x = \frac{\sqrt{10}}{5} + 3t, y = \frac{\sqrt{10}}{10} - 2t, z = -\frac{2\sqrt{10}}{5} + 6t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Poznámka.
Obecná rovnice roviny $\rho \subset \mathbf{E}_3$ dané bodem $A = [a_1, a_2, a_3] \in \rho$ a normálovým vektorem $\vec{n}_\rho = (n_1, n_2, n_3) \perp \rho$ je dána vzorcem

$$n_1 \cdot (x - a_1) + n_2 \cdot (y - a_2) + n_3 \cdot (z - a_3) = 0.$$