Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x, y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x, y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

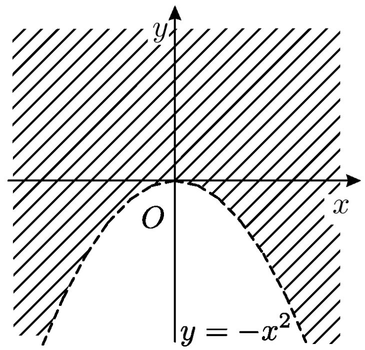
Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x, y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$

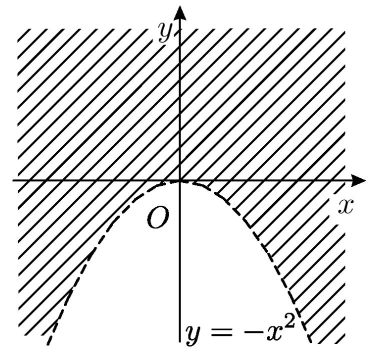


Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f. Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

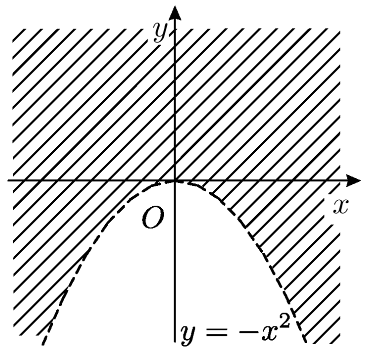
Počítejme stacionární body funkce f:

$$S:\ \left\{ \begin{array}{ll} f'_x(x,y) & \equiv \\ & \end{array} \right.$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

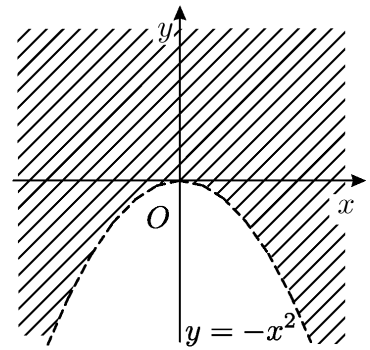
Počítejme stacionární body funkce f:

$$S: \begin{cases} f'_x(x,y) \equiv \ln\left(x^2 + y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x,y) \equiv \end{cases}$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

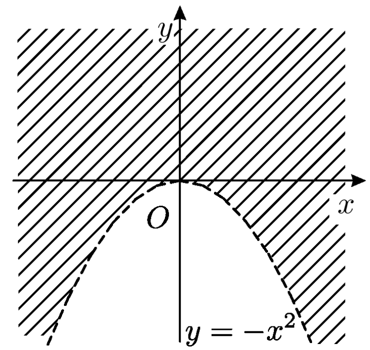
Počítejme stacionární body funkce f:

$$S: \begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv \quad \ln\left(x^2+y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x,y) & \equiv \quad \frac{x}{x^2+y} = 0 \end{cases}$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f. Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

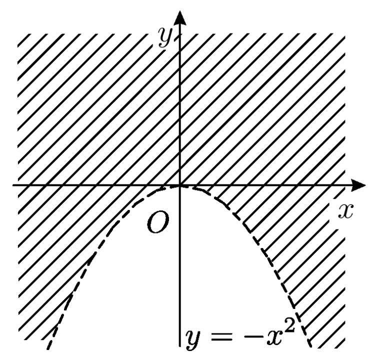
Počítejme stacionární body funkce f:

$$S: \begin{cases} f'_x(x,y) \equiv \ln\left(x^2+y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x,y) \equiv \frac{x}{x^2+y} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

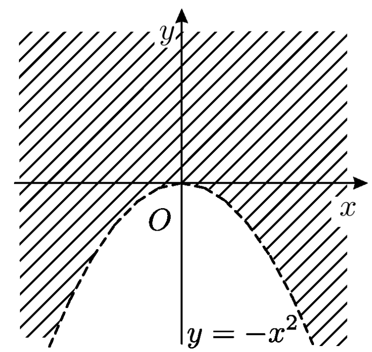
Počítejme stacionární body funkce f:

$$S: \left\{\begin{array}{lcl} f'_x(x,y) & \equiv & \ln\left(x^2+y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x,y) & \equiv & \frac{x}{x^2+y} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \ln y =$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

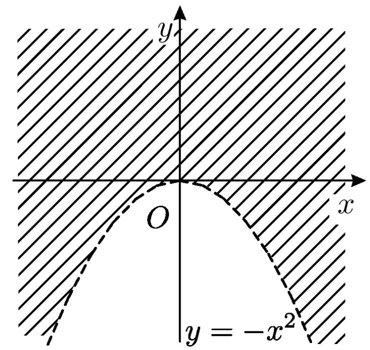
Počítejme stacionární body funkce f:

$$S: \left\{ \begin{array}{lcl} f'_x(x,y) & \equiv & \ln\left(x^2+y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x,y) & \equiv & \frac{x}{x^2+y} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \ln y = 0 \Longrightarrow$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x, y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f. Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

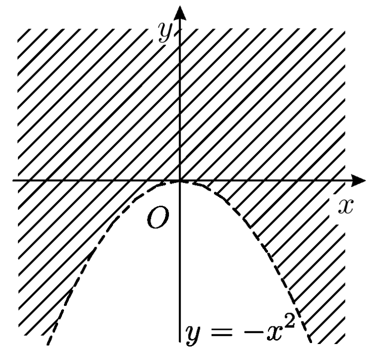
Počítejme stacionární body funkce f:

$$S: \left\{ \begin{array}{lcl} f'_x(x, y) & \equiv & \ln\left(x^2 + y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x, y) & \equiv & \frac{x}{x^2+y} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \ln y = 0 \Longrightarrow y =$$

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.

Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f.
Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$



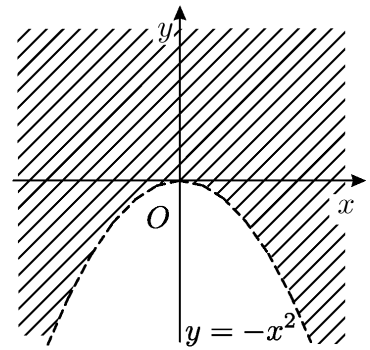
Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

Počítejme stacionární body funkce f:

$$S: \left\{\begin{array}{lll} f'_x(x,y) & \equiv & \ln\left(x^2+y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x,y) & \equiv & \frac{x}{x^2+y} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \ln y = 0 \Longrightarrow y = 1.$$

V uvažované množině D_f tedy dostáváme jediný stacionární bod $S = [0,1]$.

Příklad. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x, y) = x \cdot \ln\left(x^2 + y\right)$.



Řešení. V tomto případě nejprve určíme definiční obor dané funkce f. Z vlastností logaritmické funkce dostáváme

$$D_f = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 < y\right\}.$$

Nezapomínejte, že lokální extrémy funkce má smysl hledat jen na jejím definičním oboru.

Počítejme stacionární body funkce f:

$$S : \left\{ \begin{array}{lcl} f'_x(x, y) & \equiv & \ln\left(x^2 + y\right) + \frac{2x^2}{x^2+y} = 0 \\ f'_y(x, y) & \equiv & \frac{x}{x^2+y} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \ln y = 0 \Longrightarrow y = 1.$$

V uvažované množině D_f tedy dostáváme jediný stacionární bod $S = [0, 1]$.

Podrobnější výpočet parciálních derivací – viz zde.

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$f''_{xx}(S) \quad =$$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$f''_{xx}(S) \quad = \quad \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x + \frac{(x^2+y) \cdot 4x - 2x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2} \Bigg|_{[x,y]=[0,1]} =$$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$f''_{xx}(S) = \left. \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2} \right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,$$

$$f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) =$$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$f''_{xx}(S) = \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\Bigg|_{[x,y]=[0,1]} = 0,$$

$$f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) = \frac{(x^2+y)\cdot 1 - x \cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\Bigg|_{[x,y]=[0,1]} =$$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$f''_{xx}(S) = \left. \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2} \right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,$$

$$f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) = \left. \frac{(x^2+y)\cdot 1 - x \cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2} \right|_{[x,y]=[0,1]} = 1,$$

$$f''_{yy}(S) =$$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$\begin{aligned}
f''_{xx}(S) &= \left.\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,\\
f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) &= \left.\frac{(x^2+y)\cdot 1 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 1,\\
f''_{yy}(S) &= \left.-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} =
\end{aligned}$$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(S) &= \left.\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,\\
f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) &= \left.\frac{(x^2+y)\cdot 1 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 1,\\
f''_{yy}(S) &= \left.-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,
\end{aligned}
$$

tedy $D(0,1) =$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(S) &= \left.\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,\\
f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) &= \left.\frac{(x^2+y)\cdot 1 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 1,\\
f''_{yy}(S) &= \left.-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,
\end{aligned}
$$

tedy $D(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(S) &= \left.\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,\\
f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) &= \left.\frac{(x^2+y)\cdot 1 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 1,\\
f''_{yy}(S) &= \left.-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,
\end{aligned}
$$

tedy $D(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. V bodě $S = [0,1]$ není extrém – je to sedlový bod.

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(S) &= \left.\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,\\
f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) &= \left.\frac{(x^2+y)\cdot 1 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 1,\\
f''_{yy}(S) &= \left.-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,
\end{aligned}
$$

tedy $D(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. V bodě $S = [0,1]$ není extrém – je to sedlový bod.

Závěr: Protože bod $S = [0,1]$ byl jediný bod podezřelý z extrému,

Nyní rozhodneme o tom, zda takto nalezený stacionární bod S je bodem lokálního extrému.

Spočteme parciální derivace druhého řádu:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(S) &= \left.\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x + \frac{(x^2+y)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,\\
f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) &= \left.\frac{(x^2+y)\cdot 1 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 1,\\
f''_{yy}(S) &= \left.-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right|_{[x,y]=[0,1]} = 0,
\end{aligned}
$$

tedy $D(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. V bodě $S = [0,1]$ není extrém – je to sedlový bod.

Závěr: Protože bod $S = [0,1]$ byl jediný bod podezřelý z extrému, daná funkce f nemá na svém definičním oboru lokální extrém.

Výpočet parciálních derivací prvního řádu:

zpět

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \left(x\cdot\ln\left(x^2+y\right)\right)'_x \overset{(?)}{=} 1\cdot\ln\left(x^2+y\right) + x\cdot\left(\ln\left(x^2+y\right)\right)'_x \\ &\overset{(??)}{=} \ln\left(x^2+y\right) + x\cdot\frac{1}{x^2+y}\cdot\left(x^2+y\right)'_x \\ &= \ln\left(x^2+y\right) + x\cdot\frac{1}{x^2+y}\cdot 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y(x,y) &= \left(x\cdot\ln\left(x^2+y\right)\right)'_y \overset{(???)}{=} x\cdot\left(\ln\left(x^2+y\right)\right)'_y \\ &\overset{(?!)}{=} x\cdot\frac{1}{x^2+y}\cdot\left(x^2+y\right)'_y \\ &= x\cdot\frac{1}{x^2+y}\cdot 1 \end{aligned}$$