Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16$ na množině

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 \le y \le 4 \right\}.$$

Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16$ na množině

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 \leq y \leq 4 \right\}.$$

Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16$ na množině

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 \leq y \leq 4 \right\}.$$

Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Množina M je vymezena parabolou o rovnici $y = x^2$ a přímkou $y = 4$.

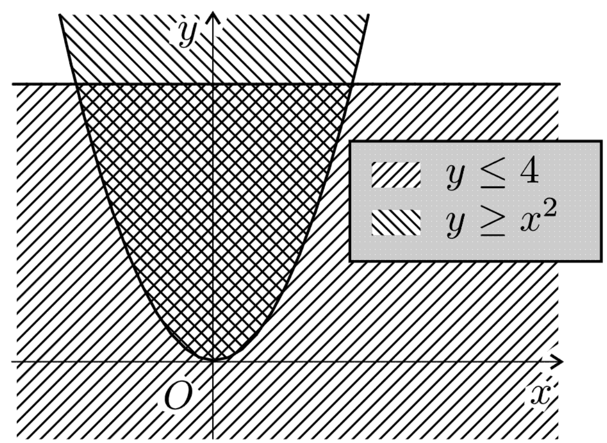
Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16$ na množině

$$M = \left\{ [x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 \leq y \leq 4 \right\}.$$

Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Množina M je vymezena parabolou o rovnici $y = x^2$ a přímkou $y = 4$.

Celkem tedy dostáváme



Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'_x(x,y) & \equiv & \left(2x^3+4x^2+y^2-2xy-16\right)'_x = \\ & & \end{array}\right.$$

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) \equiv \left(2x^3+4x^2+y^2-2xy-16\right)'_x = 6x^2+8x-2y=0; \\ \end{cases}$$

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv \quad \left(2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\right)'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv \end{cases}$$

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv \quad \left(2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\right)'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv \quad 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv \quad \left(2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\right)'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv \quad 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice máme $y = x$, což dosazením do první rovnice dává

$$6x^2 + 6x = 0$$

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv \quad \left(2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\right)'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv \quad 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice máme $y = x$, což dosazením do první rovnice dává

$$6x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow x(x+1) = 0.$$

©Oto Přibyl, Veronika Chrastinová, 2005

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv \quad \left(2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\right)'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv \quad 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice máme $y = x$, což dosazením do první rovnice dává

$$6x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow x(x+1) = 0.$$

Vyšetřovaná soustava má dvě řešení

$$\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & 0, & y_1 & = & 0; \\ x_2 & = & -1, & y_2 & = & -1, \end{array}$$

©Oto Přibyl, Veronika Chrastinová, 2005

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(2x^3+4x^2+y^2-2xy-16\right)'_x = 6x^2+8x-2y=0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & 2y-2x=0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice máme $y = x$, což dosazením do první rovnice dává

$$6x^2+6x=0 \Longrightarrow x(x+1)=0.$$

Vyšetřovaná soustava má dvě řešení

$$\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & 0, & y_1 & = & 0; \\ x_2 & = & -1, & y_2 & = & -1, \end{array}$$

nalezli jsme tedy celkem dva stacionární body, avšak $[-1,-1] \notin M$.

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(2x^3+4x^2+y^2-2xy-16\right)'_x = 6x^2+8x-2y=0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & 2y-2x=0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice máme $y = x$, což dosazením do první rovnice dává

$$6x^2+6x=0 \Longrightarrow x(x+1)=0.$$

Vyšetřovaná soustava má dvě řešení

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 0, & y_1 & = & 0; \\ x_2 & = & -1, & y_2 & = & -1, \end{array}$$

nalezli jsme tedy celkem dva stacionární body, avšak $[-1,-1] \notin M$.

Máme tedy první bod podezřelý z absolutního extrému: $S_1 = [0,0] \in M$, $f(S_1) = -16$.

Určíme stacionární body funkce f uvnitř M.

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(2x^3+4x^2+y^2-2xy-16\right)'_x = 6x^2+8x-2y=0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & 2y-2x=0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice máme $y=x$, což dosazením do první rovnice dává

$$6x^2+6x=0 \Longrightarrow x(x+1)=0.$$

Vyšetřovaná soustava má dvě řešení

$$\begin{array}{rcrrcr} x_1 & = & 0, & y_1 & = & 0; \\ x_2 & = & -1, & y_2 & = & -1, \end{array}$$

nalezli jsme tedy celkem dva stacionární body, avšak $[-1,-1] \notin M$.

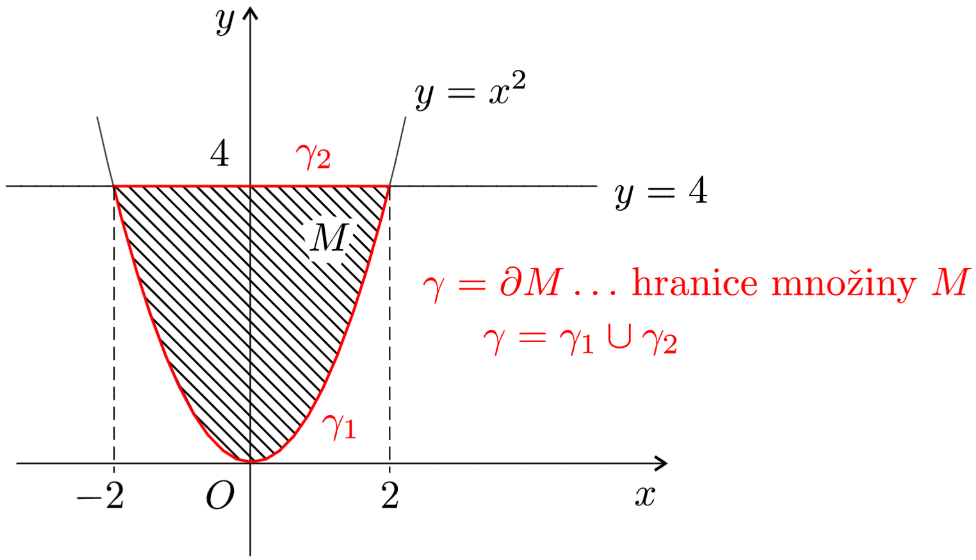
Máme tedy první bod podezřelý z absolutního extrému: $S_1=[0,0] \in M$, $f(S_1)=-16$.

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

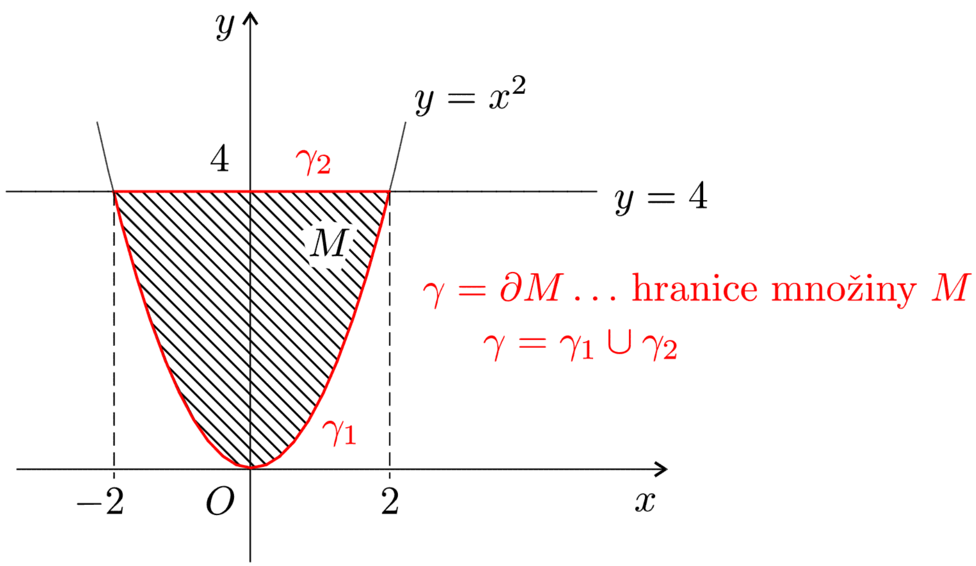
©Oto Přibyl, Veronika Chrastinová, 2005

Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).

Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).

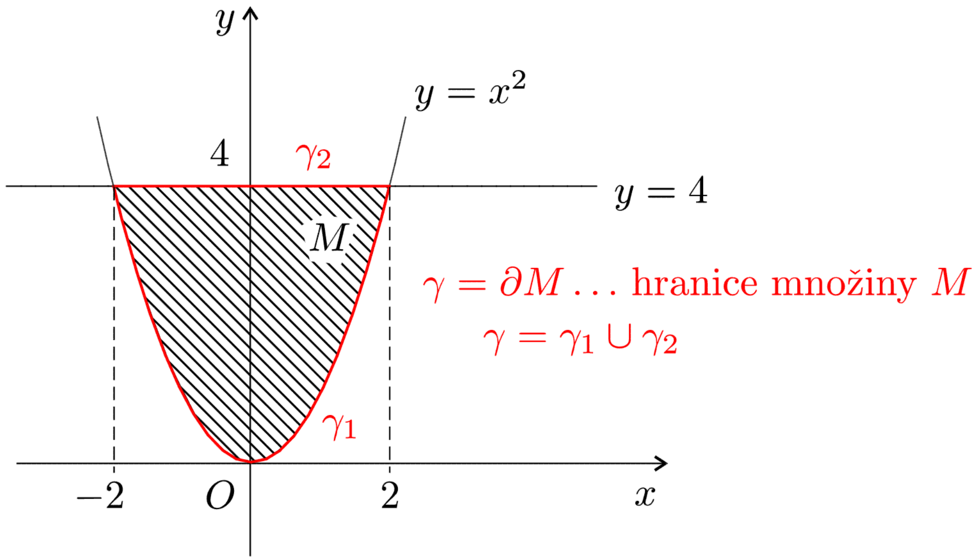


Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).



- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$

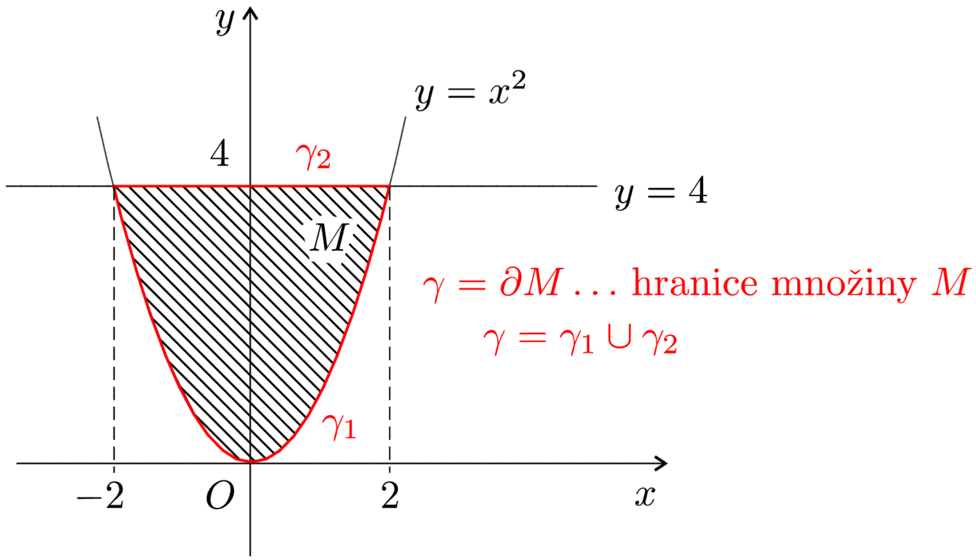
Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).



- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1.

©Oto Přibyl, Veronika Chrastinová, 2005

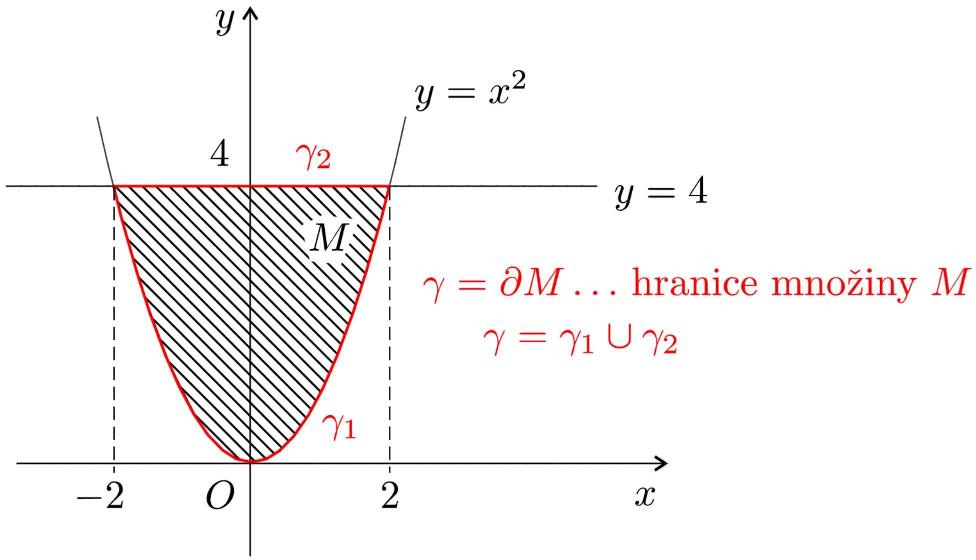
Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).



- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1. Potom

$$f_1(x) = f(x, x^2) =$$

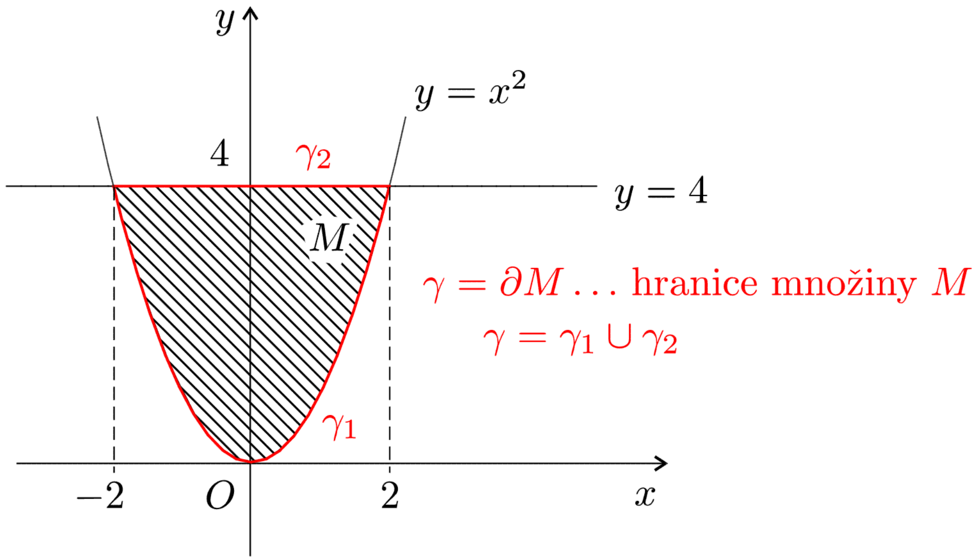
Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).



- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1. Potom

$$f_1(x) = f(x, x^2) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=x^2} =$$

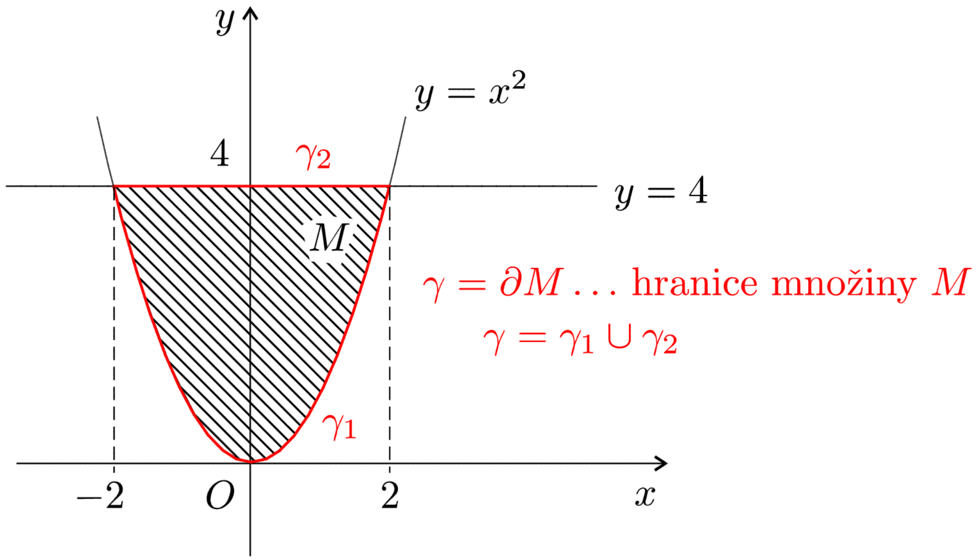
Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).



- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1. Potom

$$f_1(x) = f(x, x^2) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=x^2} = x^4 + 4x^2 - 16.$$

Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).

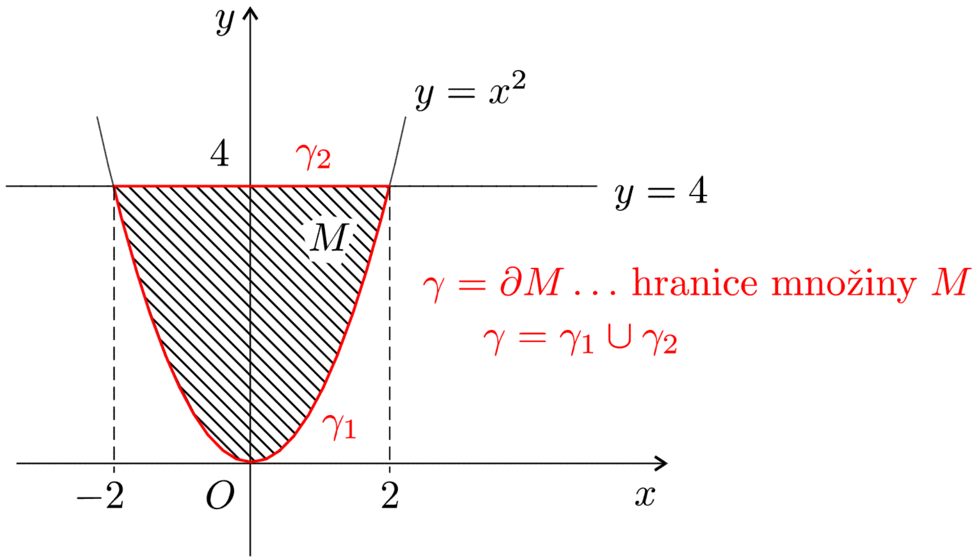


- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1. Potom

$$f_1(x) = f(x, x^2) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=x^2} = x^4 + 4x^2 - 16.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_1 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$: $f_1'(x) \equiv$

Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).

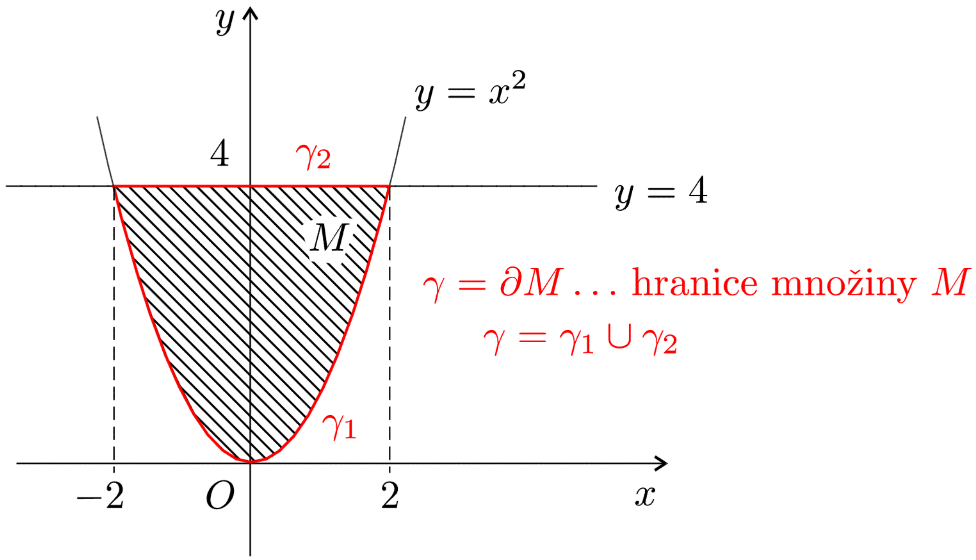


- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2 \rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1. Potom

$$f_1(x) = f(x, x^2) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=x^2} = x^4 + 4x^2 - 16.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_1 pro $x \in \langle -2, 2 \rangle$: $f_1'(x) \equiv 4x \left(x^2 + 2 \right)$

Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).

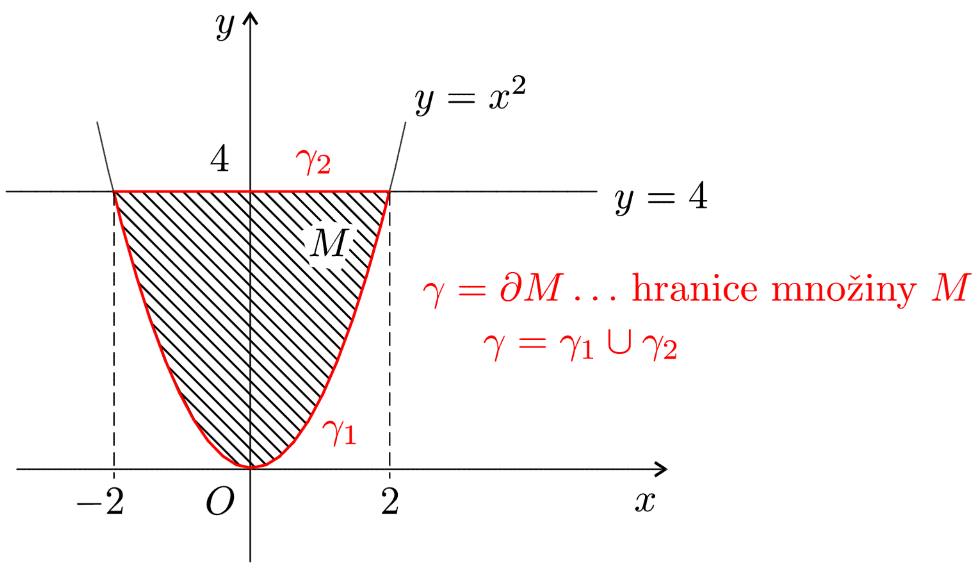


- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1. Potom

$$f_1(x) = f(x, x^2) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=x^2} = x^4 + 4x^2 - 16.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_1 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$: $f_1'(x) \equiv 4x\left(x^2 + 2\right) = 0$

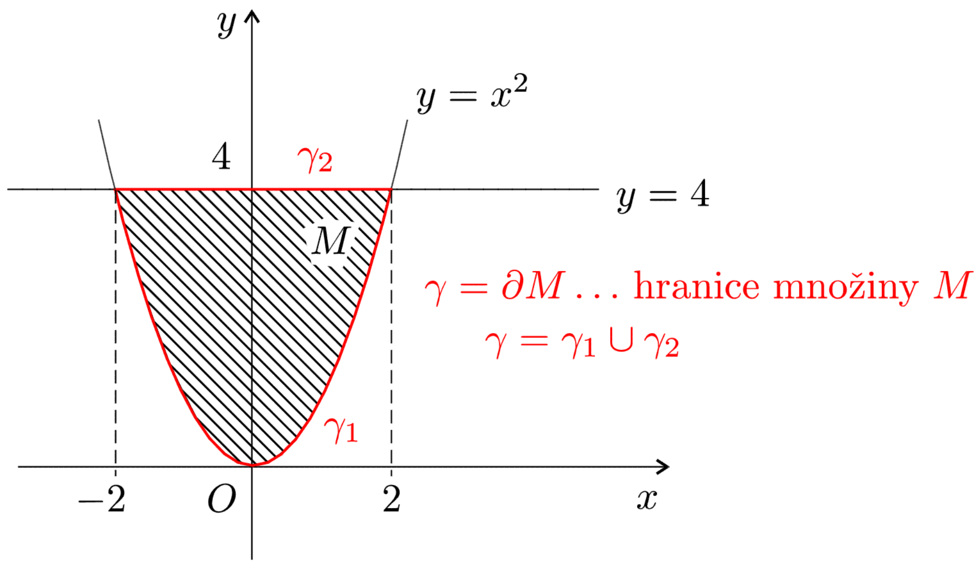
Hranici popíšeme po částech jako sjednocení křivek γ_1 a γ_2 (viz obrázek).



- Uvažujme křivku $\gamma_1 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ a označme f_1 zúžení funkce f na γ_1. Potom

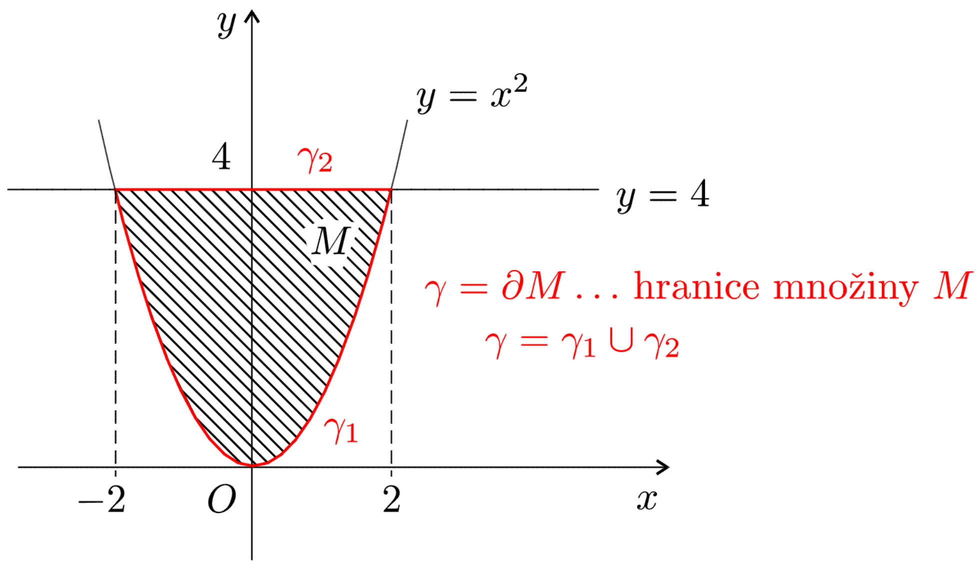
$$f_1(x) = f(x, x^2) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=x^2} = x^4 + 4x^2 - 16.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_1 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$: $f_1'(x) \equiv 4x\left(x^2 + 2\right) = 0 \Longrightarrow x = 0$, což vede na bod $S_1 = [0, 0] \in \gamma_1$.

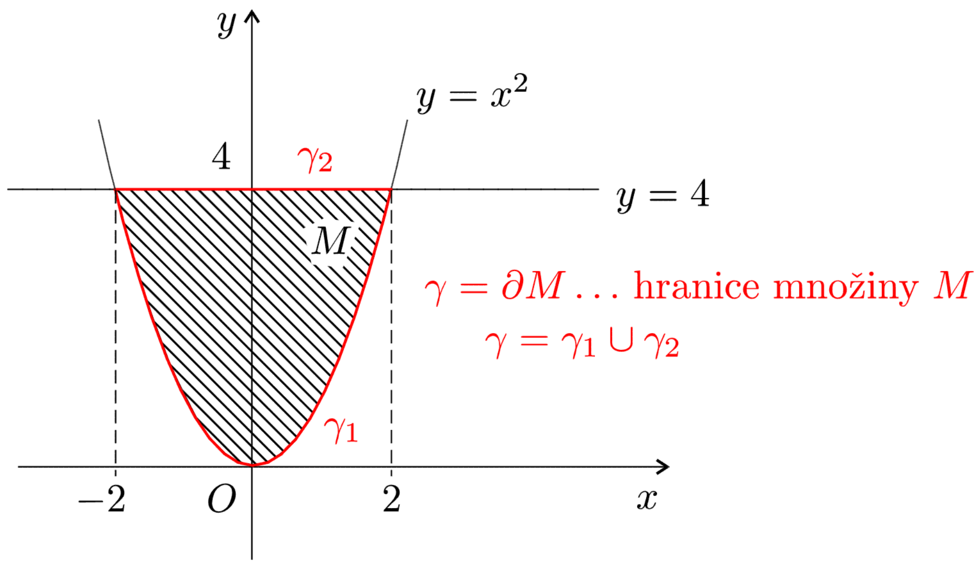


- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$

©Oto Přibyl, Veronika Chrastinová, 2005

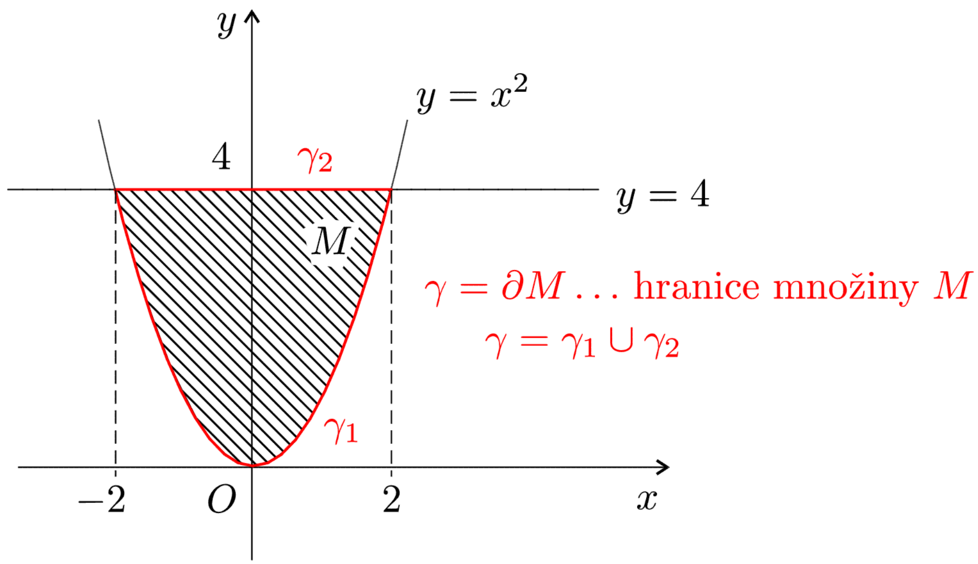


- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2.



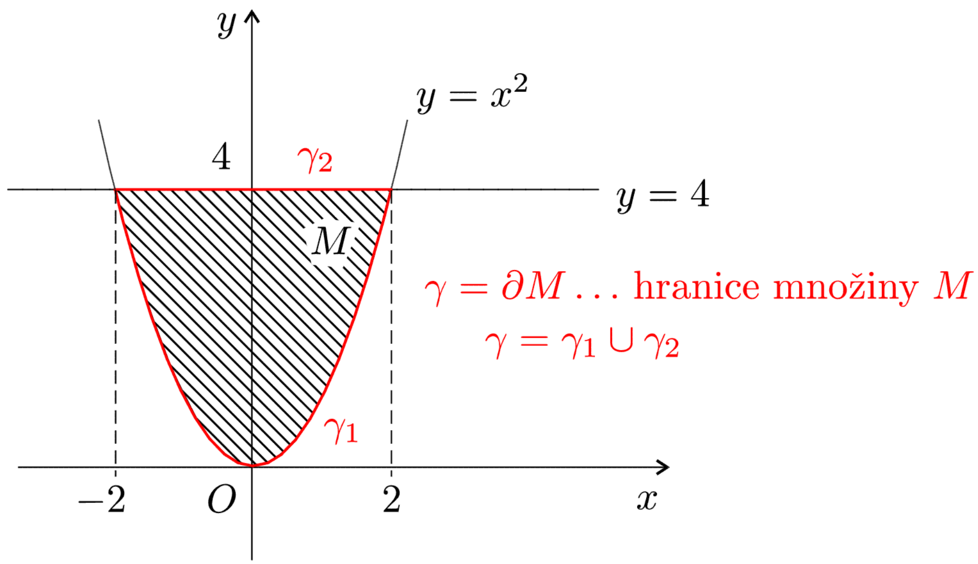
- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2 \rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) =$$



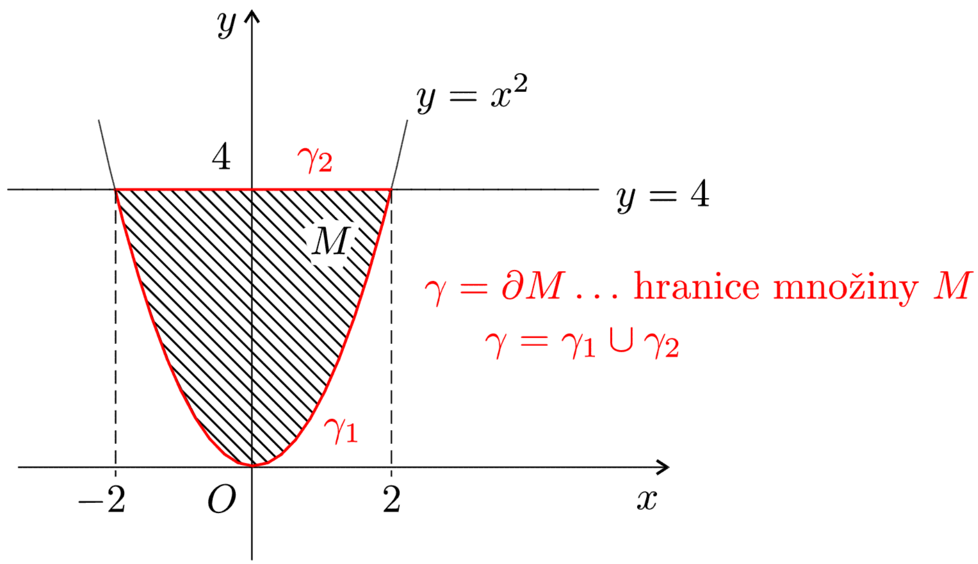
- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x,4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} =$$



- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

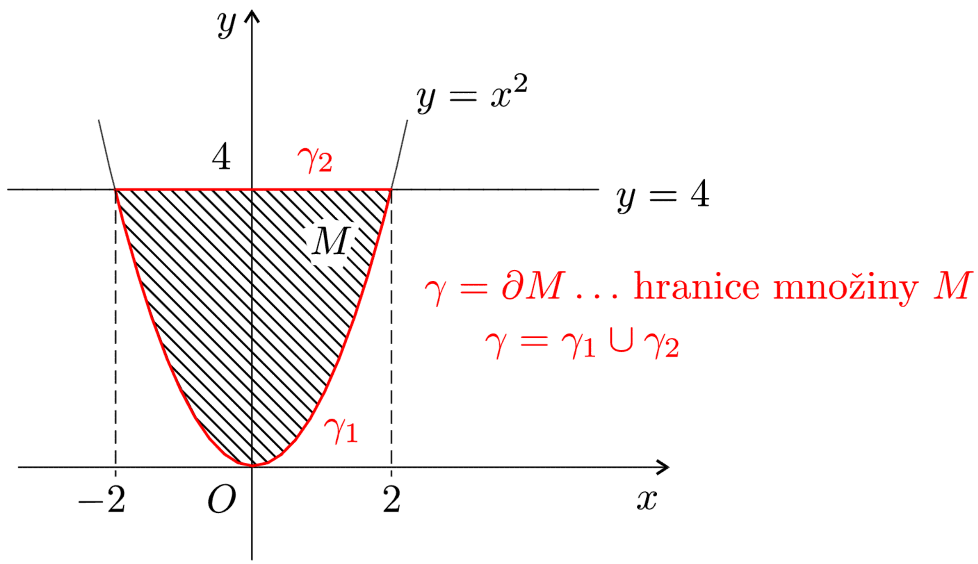
$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$



- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

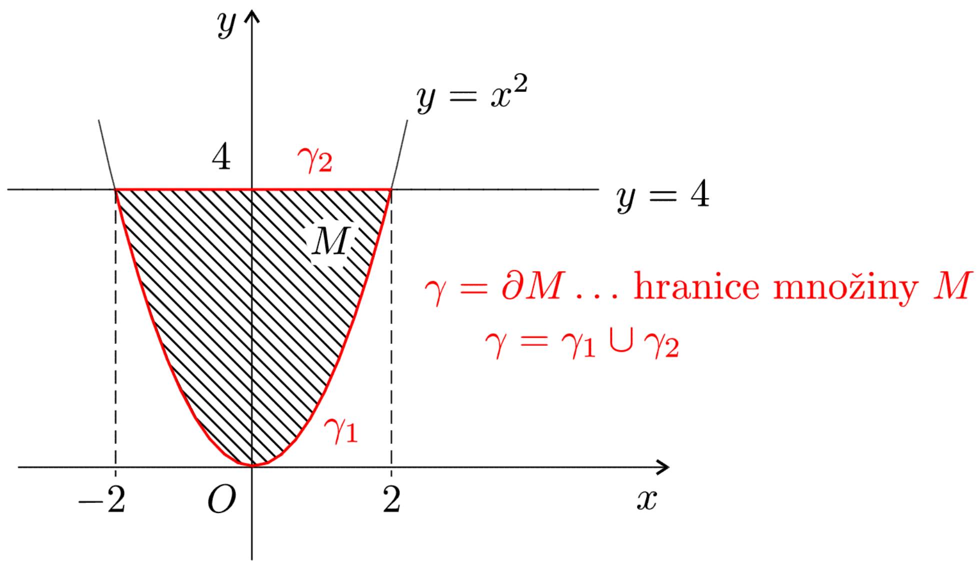


- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv$$

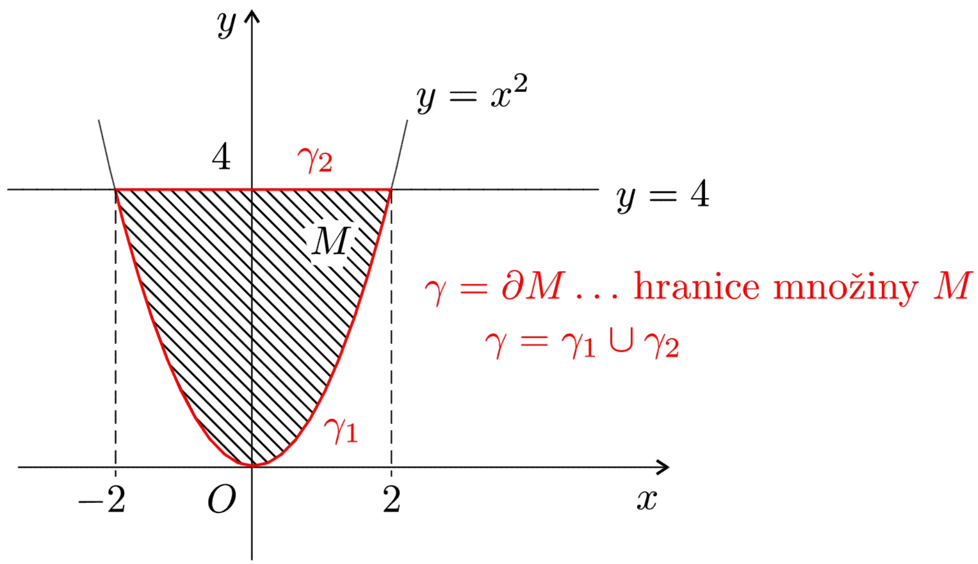


- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8$$

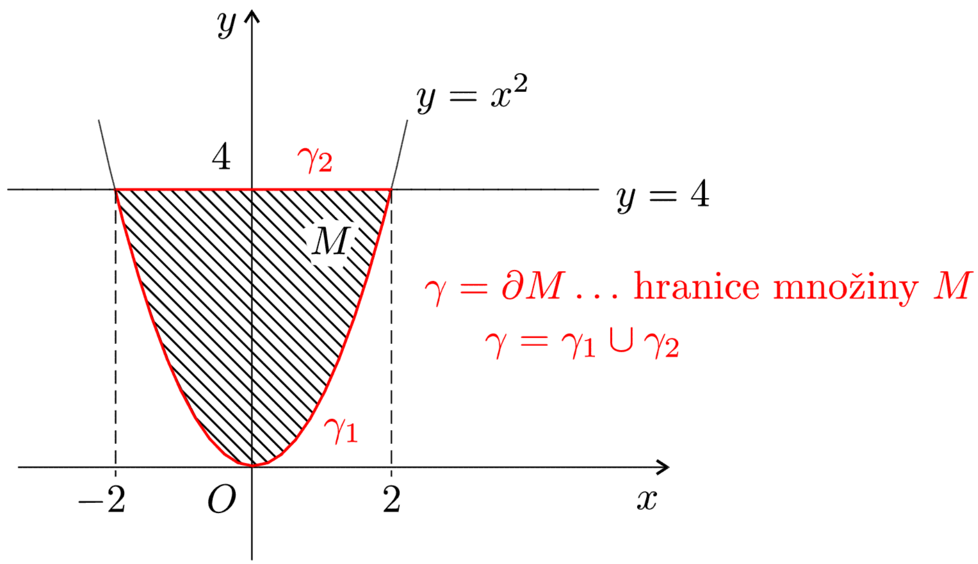


- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8 = 0$$

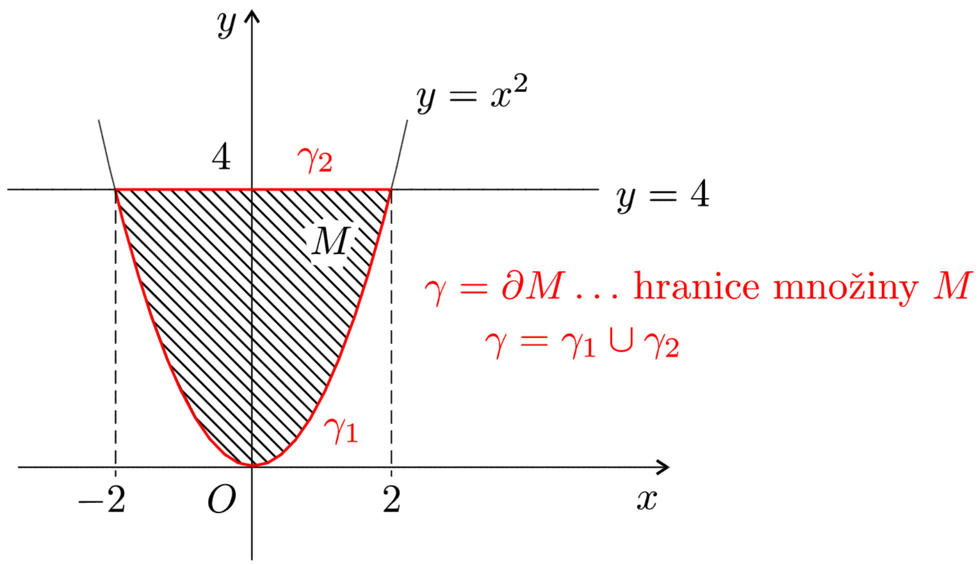


- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 16}{12} \Longrightarrow$$

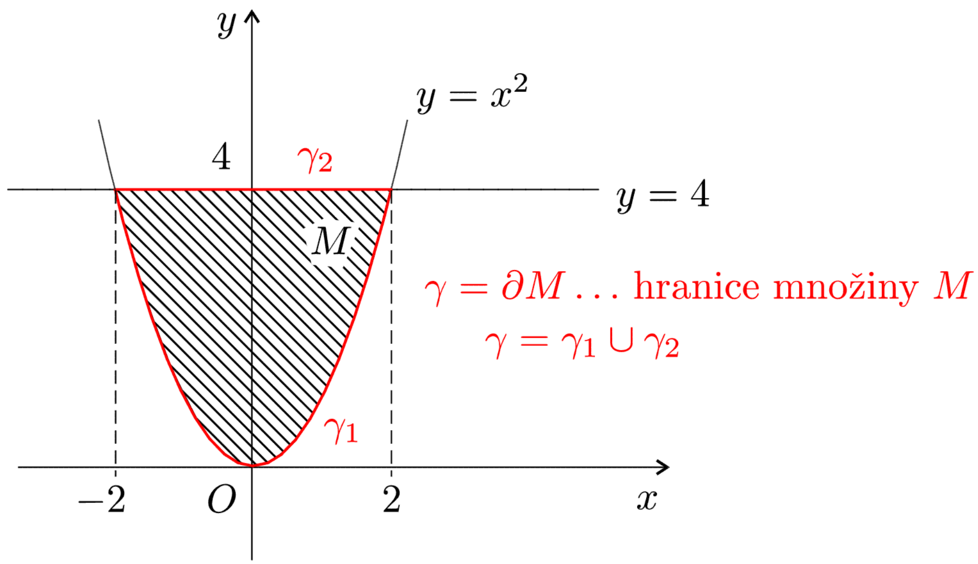


- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 16}{12} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2,$$



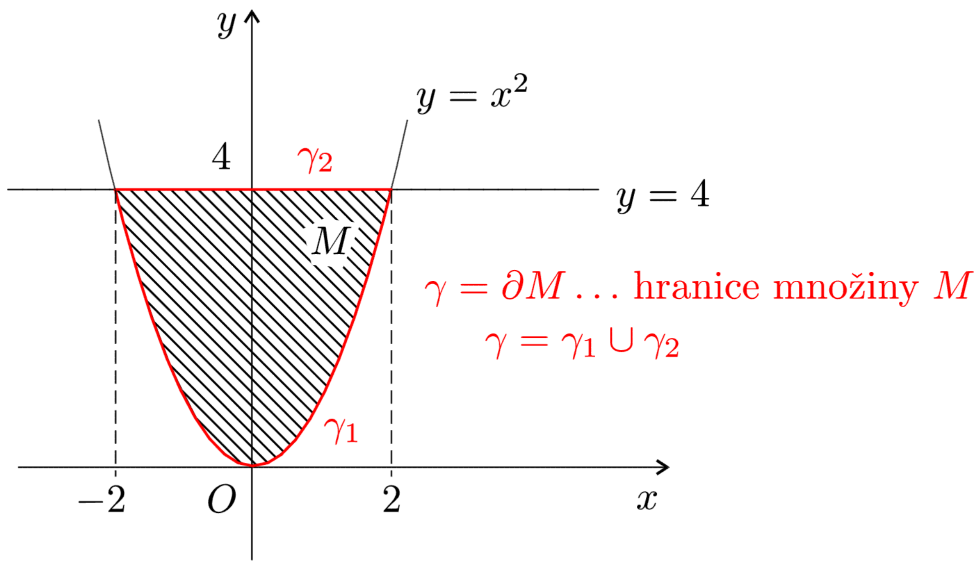
- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\Big|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 16}{12} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2,$$

přičemž $x_{1,2} \in \langle -2, 2\rangle$.



- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

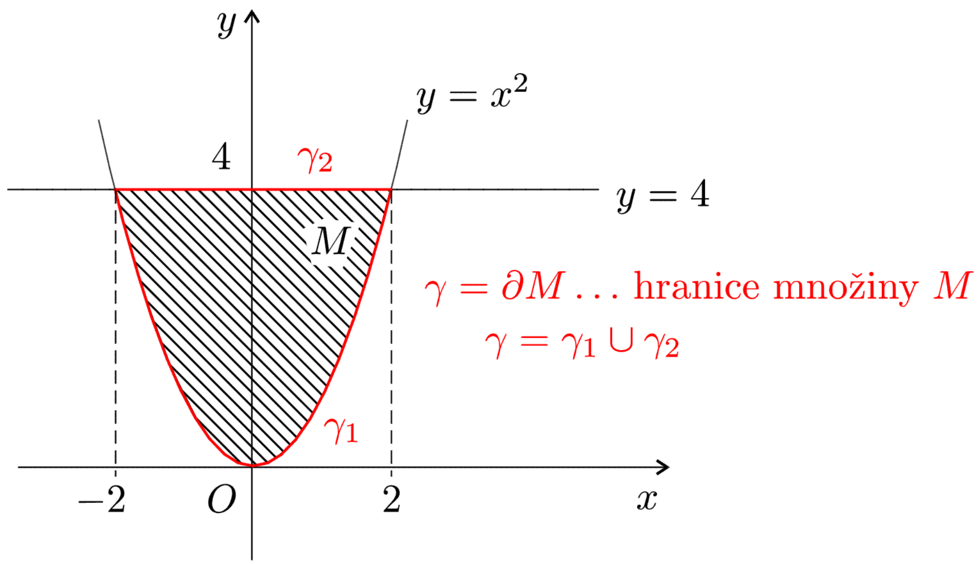
$$f_2(x) = f(x, 4) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\Big|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 16}{12} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2,$$

přičemž $x_{1,2} \in \langle -2, 2\rangle$. Spočtené hodnoty $x_{1,2}$ vedou na dva body podezřelé z absolutního extrému:

©Oto Přibyl, Veronika Chrastinová, 2005



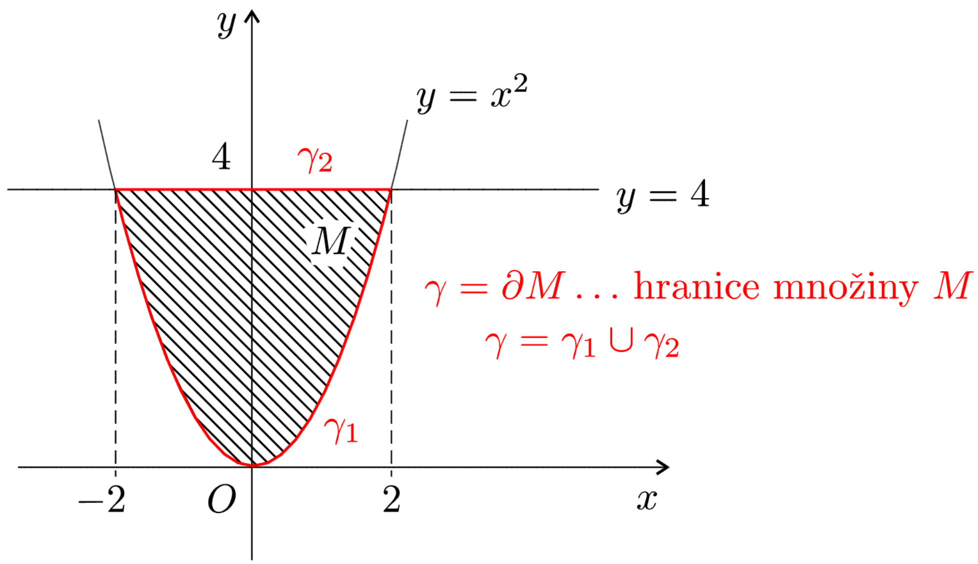
- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

$$f_2(x) = f(x, 4) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16\Big|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 16}{12} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2,$$

přičemž $x_{1,2} \in \langle -2, 2\rangle$. Spočtené hodnoty $x_{1,2}$ vedou na dva body podezřelé z absolutního extrému: $S_2 = [\frac{2}{3}, 4]$, $S_3 = [-2, 4]$.



- Podobně pro $\gamma_2 := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$ označme f_2 zúžení funkce f na γ_2. Potom

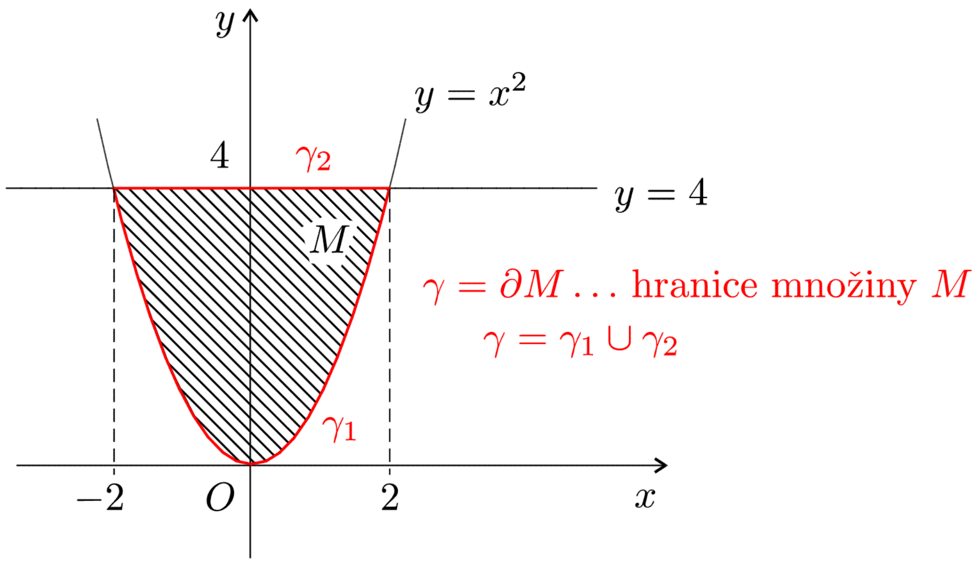
$$f_2(x) = f(x, 4) = \left. 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - 16 \right|_{y=4} = 2x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Vyšetřujme stacionární body funkce f_2 pro $x \in \langle -2, 2\rangle$:

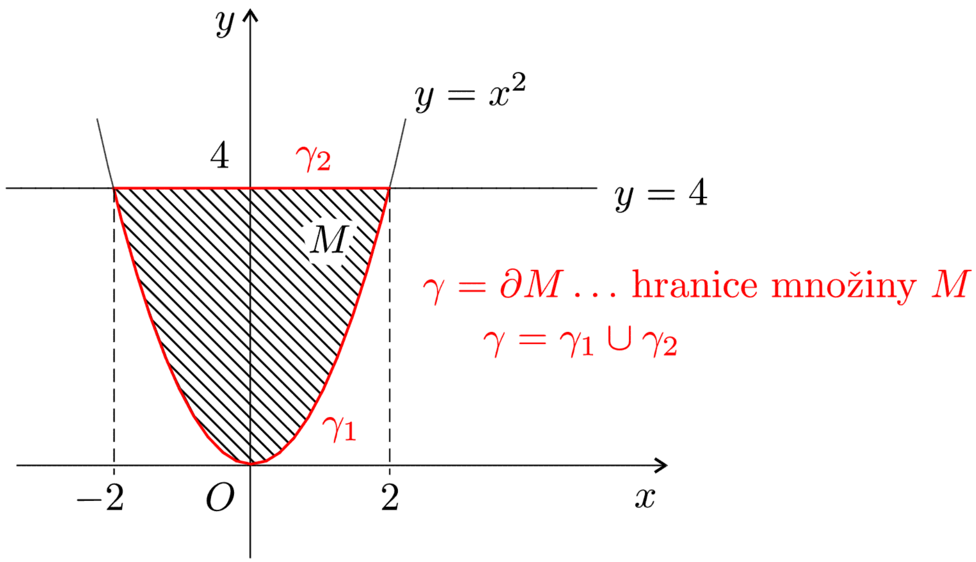
$$f_2'(x) \equiv 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 16}{12} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2,$$

přičemž $x_{1,2} \in \langle -2, 2\rangle$. Spočtené hodnoty $x_{1,2}$ vedou na dva body podezřelé z absolutního extrému: $S_2 = [\frac{2}{3}, 4]$, $S_3 = [-2, 4]$. Platí $f(S_2) \doteq -2,96,\ f(S_3) = 16$.

Zbývá vyšetřit poslední kritické body, ve kterých by uvažovaná funkce mohla nabývat svého absolutního extrému. Jsou to body, v nichž se spojují jednotlivé segmenty hranice, tzv. ,,rohy" množiny M.

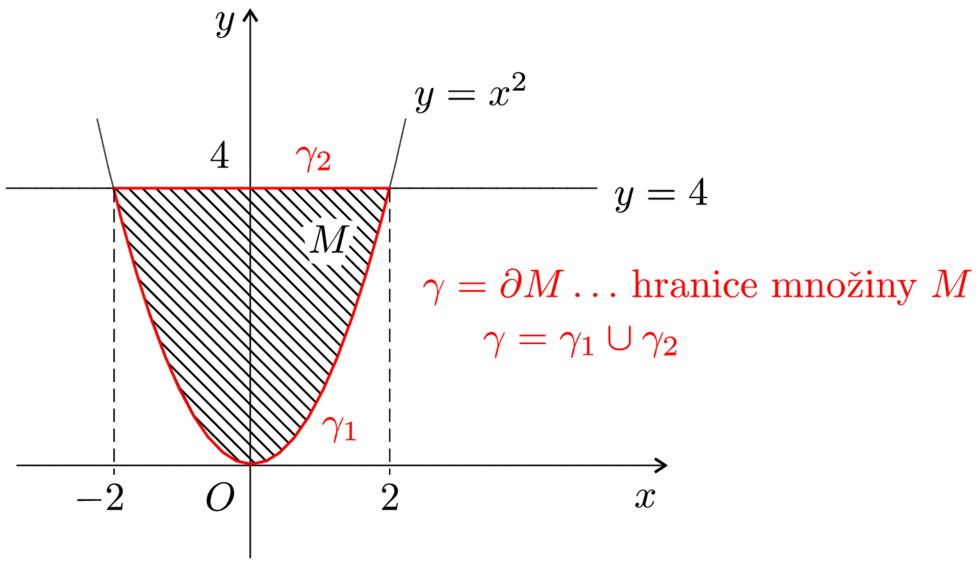


Zbývá vyšetřit poslední kritické body, ve kterých by uvažovaná funkce mohla nabývat svého absolutního extrému. Jsou to body, v nichž se spojují jednotlivé segmenty hranice, tzv. ,,rohy" množiny M.



Platí (viz obrázek) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{S_3, S_4 = [2, 4]\}$, kde bod $S_3 = [-2, 4]$ jsme určili jako ,,podezřelý z extrému" už v předchozí části.

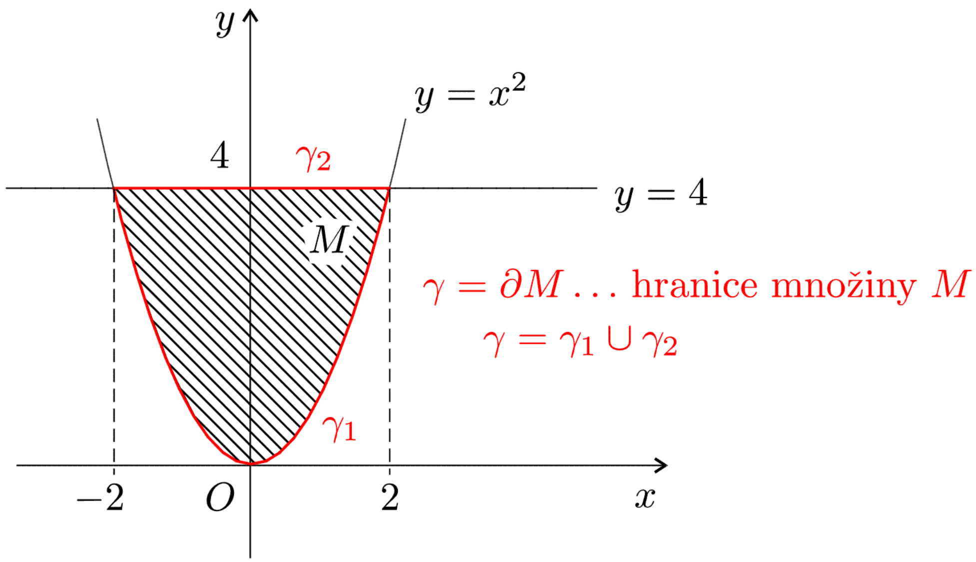
Zbývá vyšetřit poslední kritické body, ve kterých by uvažovaná funkce mohla nabývat svého absolutního extrému. Jsou to body, v nichž se spojují jednotlivé segmenty hranice, tzv. ,,rohy" množiny M.



Platí (viz obrázek) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{S_3, S_4 = [2, 4]\}$, kde bod $S_3 = [-2, 4]$ jsme určili jako ,,podezřelý z extrému" už v předchozí části.

Celkem tedy máme čtyři body podezřelé z extrému: $S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [2/3, 4]$, $S_3[-2, 4]$ a $S_4 = [2, 4]$.

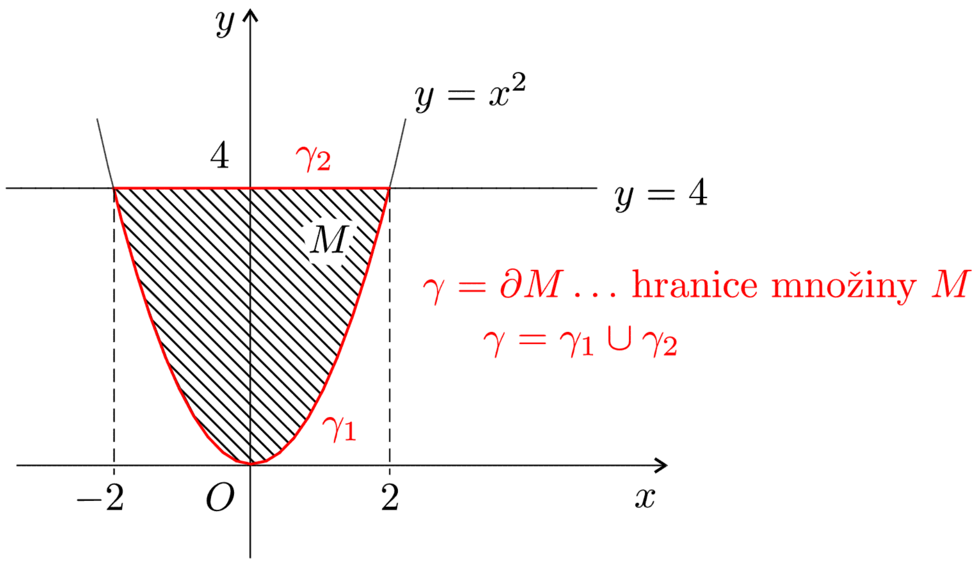
Zbývá vyšetřit poslední kritické body, ve kterých by uvažovaná funkce mohla nabývat svého absolutního extrému. Jsou to body, v nichž se spojují jednotlivé segmenty hranice, tzv. ,,rohy" množiny M.



Platí (viz obrázek) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{S_3, S_4 = [2,4]\}$, kde bod $S_3 = [-2,4]$ jsme určili jako ,,podezřelý z extrému" už v předchozí části.

Celkem tedy máme čtyři body podezřelé z extrému: $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [2/3,4]$, $S_3[-2,4]$ a $S_4 = [2,4]$. Připomeňme, že jsme vyčíslili $f(S_1) = -16$, $f(S_2) \doteq -2,96$ a $f(S_3) = 16$.

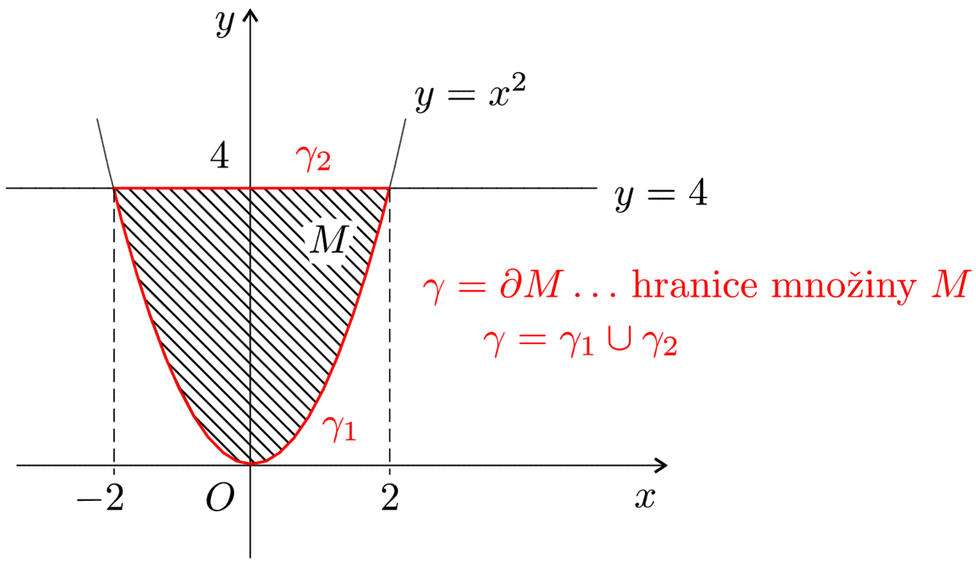
Zbývá vyšetřit poslední kritické body, ve kterých by uvažovaná funkce mohla nabývat svého absolutního extrému. Jsou to body, v nichž se spojují jednotlivé segmenty hranice, tzv. ,,rohy" množiny M.



Platí (viz obrázek) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{S_3, S_4 = [2, 4]\}$, kde bod $S_3 = [-2, 4]$ jsme určili jako ,,podezřelý z extrému" už v předchozí části.

Celkem tedy máme čtyři body podezřelé z extrému: $S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [2/3, 4]$, $S_3[-2, 4]$ a $S_4 = [2, 4]$. Připomeňme, že jsme vyčíslili $f(S_1) = -16$, $f(S_2) \doteq -2,96$ a $f(S_3) = 16$. Navíc $f(S_4) = 16$.

Zbývá vyšetřit poslední kritické body, ve kterých by uvažovaná funkce mohla nabývat svého absolutního extrému. Jsou to body, v nichž se spojují jednotlivé segmenty hranice, tzv. ,,rohy" množiny M.



Platí (viz obrázek) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{S_3, S_4 = [2, 4]\}$, kde bod $S_3 = [-2, 4]$ jsme určili jako ,,podezřelý z extrému" už v předchozí části.

Celkem tedy máme čtyři body podezřelé z extrému: $S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [2/3, 4]$, $S_3[-2, 4]$ a $S_4 = [2, 4]$. Připomeňme, že jsme vyčíslili $f(S_1) = -16$, $f(S_2) \doteq -2,96$ a $f(S_3) = 16$. Navíc $f(S_4) = 16$.
Porovnáním těchto čtyř hodnot vychází absolutní maximum ve dvou bodech $S_{3,4}$, absolutní minimum v bodě S_1.