Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y$ na množině

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6 \right\}.$$

Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y$ na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\right\}.$$

Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y$ na množině

$$M = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6 \right\}.$$

Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Množina M je vymezena trojicí přímek $y = 0$, $x = 0$ a $x + y = 6$.

Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y$ na množině

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\right\}.$$

Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Množina M je vymezena trojicí přímek $y = 0$, $x = 0$ a $x + y = 6$.

Množina M je dána průnikem tří polorovin.

Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y$ na množině

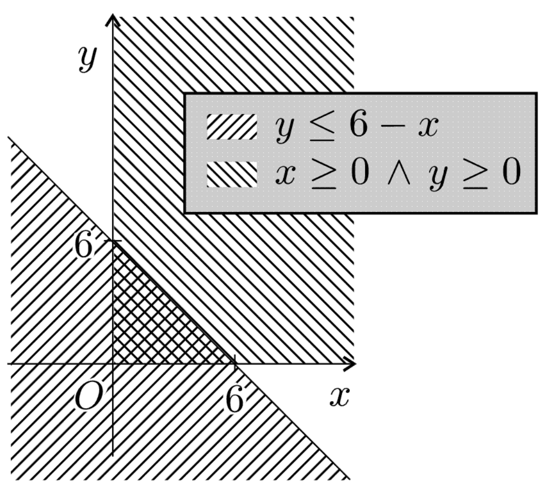
$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\right\}.$$

Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Množina M je vymezena trojicí přímek $y = 0$, $x = 0$ a $x + y = 6$.

Množina M je dána průnikem tří polorovin.

Celkem tedy dostáváme



Příklad. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y$ na množině

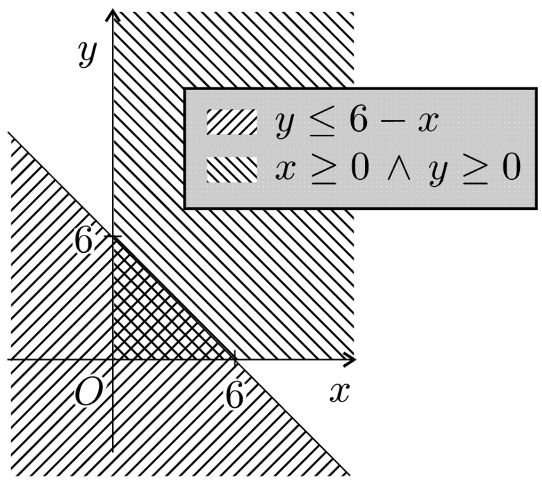
$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6 \right\}.$$

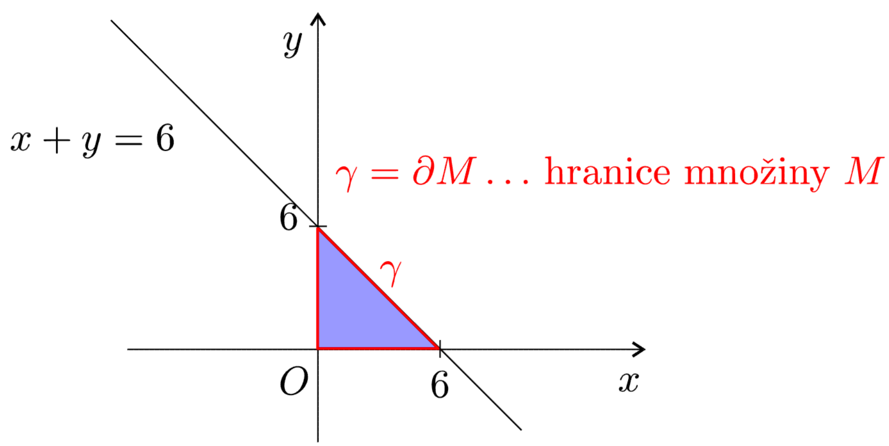
Řešení. Nejprve v souřadnicové rovině zakresleme množinu M.

Množina M je vymezena trojicí přímek $y = 0$, $x = 0$ a $x + y = 6$.

Množina M je dána průnikem tří polorovin.

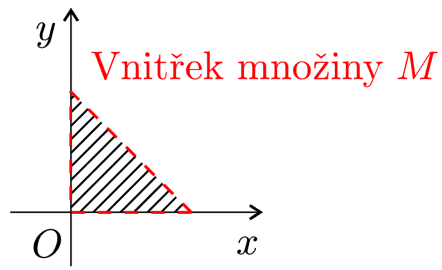
Celkem tedy dostáváme





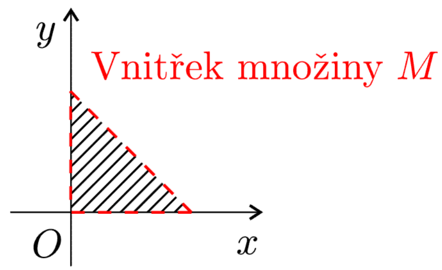
Řešení rozdělíme do dvou kroků:

- Nejprve na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f;

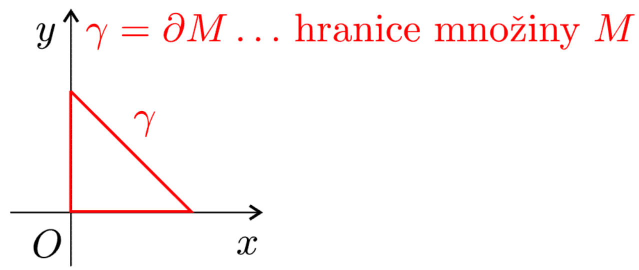


Řešení rozdělíme do dvou kroků:

- Nejprve na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f;

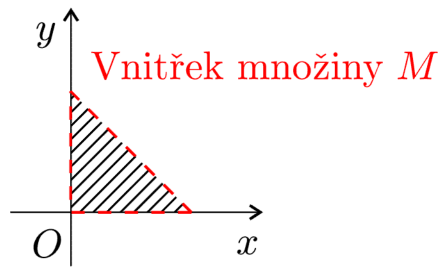


- Posléze vyšetříme extrémy funkce f vázané na hranici množiny M.

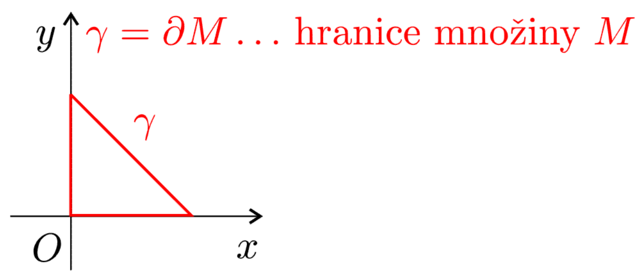


Řešení rozdělíme do dvou kroků:

- Nejprve na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f;



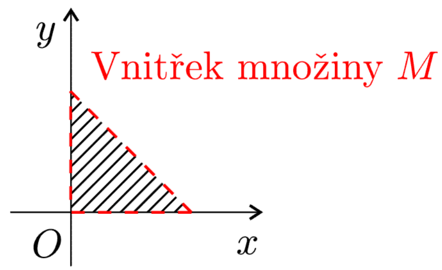
- Posléze vyšetříme extrémy funkce f vázané na hranici množiny M.



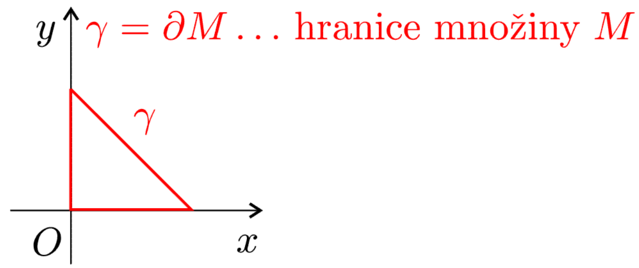
Ze všech takto nalezených bodů vybereme bod (body) absolutního maxima, resp. minima.

Řešení rozdělíme do dvou kroků:

- Nejprve na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f;



- Posléze vyšetříme extrémy funkce f vázané na hranici množiny M.



Ze všech takto nalezených bodů vybereme bod (body) absolutního maxima, resp. minima.

Poznámka. ,,Vnitřkem" množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů uzavřené množiny M, tj. množinu M s vyloučením hranice. Vnitřek množiny M je tedy popsán nerovnostmi: $x > 0,\ y > 0,\ x + y < 6$.

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) \equiv \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv \\ \end{cases}$$

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) \equiv \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ \end{cases}$$

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & \end{cases}$$

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & x^3 + 2x^2y - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & x^3 + 2x^2y - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Po úpravě

$$\begin{cases} xy \cdot (3x + 2y - 8) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x + 2y - 8 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0; \\ \end{cases}$$

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv \quad \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv \quad x^3 + 2x^2y - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Po úpravě

$$\begin{cases} xy \cdot (3x + 2y - 8) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x + 2y - 8 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0; \\ x^2 \cdot (x + 2y - 4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + 2y - 4 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0, \end{cases}$$

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & x^3 + 2x^2y - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Po úpravě

$$\begin{cases} xy \cdot (3x + 2y - 8) = 0 & \Longrightarrow & 3x + 2y - 8 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0; \\ x^2 \cdot (x + 2y - 4) = 0 & \Longrightarrow & x + 2y - 4 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0, \end{cases}$$

kde využíváme toho, že pracujeme pouze na vnitřku množiny M (viz poznámka na předchozí straně).

Vzniklá soustava má jediné řešení

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & x^3 + 2x^2y - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Po úpravě

$$\begin{cases} xy \cdot (3x + 2y - 8) = 0 & \Longrightarrow & 3x + 2y - 8 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0; \\ x^2 \cdot (x + 2y - 4) = 0 & \Longrightarrow & x + 2y - 4 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0, \end{cases}$$

kde využíváme toho, že pracujeme pouze na vnitřku množiny M (viz poznámka na předchozí straně).

Vzniklá soustava má jediné řešení $x = 2$, $y = 1$. (Podrobnější propočet proveďte samostatně.)

Máme tedy první bod podezřelý z absolutního extrému: $S_1 = [2, 1]$,

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & x^3 + 2x^2y - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Po úpravě

$$\begin{cases} xy \cdot (3x + 2y - 8) = 0 & \Longrightarrow & 3x + 2y - 8 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0; \\ x^2 \cdot (x + 2y - 4) = 0 & \Longrightarrow & x + 2y - 4 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0, \end{cases}$$

kde využíváme toho, že pracujeme pouze na vnitřku množiny M (viz poznámka na předchozí straně).

Vzniklá soustava má jediné řešení $x = 2$, $y = 1$. (Podrobnější propočet proveďte samostatně.)

Máme tedy první bod podezřelý z absolutního extrému: $S_1 = [2,1]$, přitom nalezený stacionární bod je skutečně vnitřním bodem množiny M, což nesmíme opomenout prověřit.

Na vnitřku množiny M určíme stacionární body funkce f:

Spočtěme parciální derivace prvního řádu funkce f:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) & \equiv & \left(x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\right)'_x \equiv 3x^2y + 2xy^2 - 8xy = 0; \\ f'_y(x,y) & \equiv & x^3 + 2x^2y - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Po úpravě

$$\begin{cases} xy \cdot (3x + 2y - 8) = 0 & \Longrightarrow & 3x + 2y - 8 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0; \\ x^2 \cdot (x + 2y - 4) = 0 & \Longrightarrow & x + 2y - 4 = 0 \text{ pro } x > 0,\ y > 0, \end{cases}$$

kde využíváme toho, že pracujeme pouze na vnitřku množiny M (viz poznámka na předchozí straně).

Vzniklá soustava má jediné řešení $x = 2$, $y = 1$. (Podrobnější propočet proveďte samostatně.)

Máme tedy první bod podezřelý z absolutního extrému: $S_1 = [2,1]$, přitom nalezený stacionární bod je skutečně vnitřním bodem množiny M, což nesmíme opomenout prověřit. Platí $f(S_1) = -4$.

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.

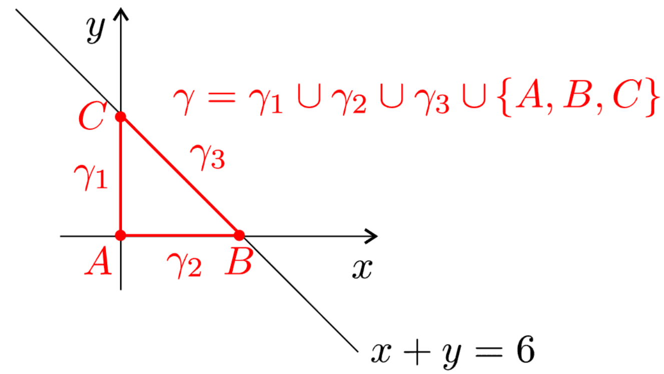
Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.

Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

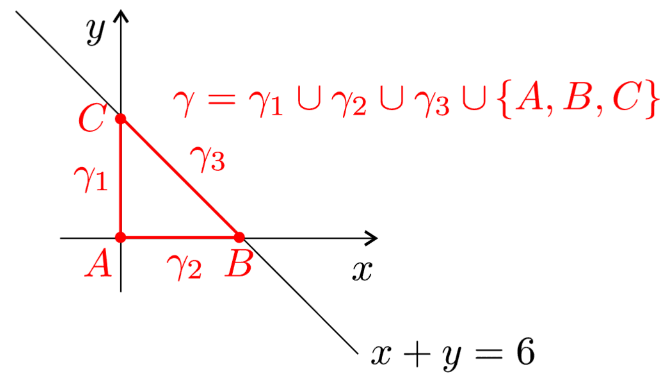
Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.

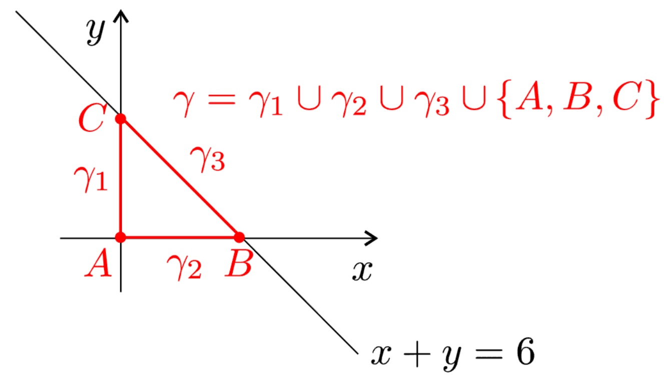


Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1 : \ x = 0, \ y = t, \ t \in (0, 6);$

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.

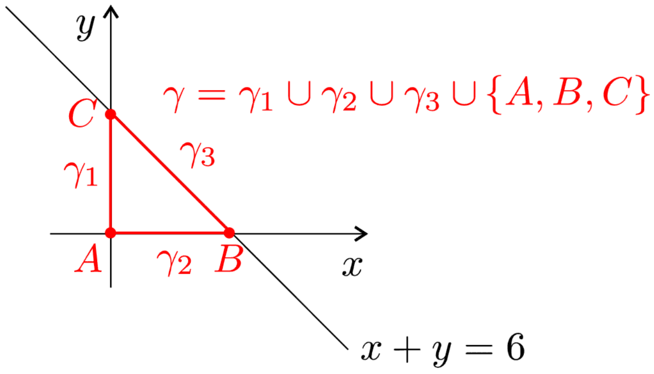


Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1 :\ x = 0,\ y = t,\ t \in (0, 6);\ f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0,\ y=t} \equiv 0,$

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



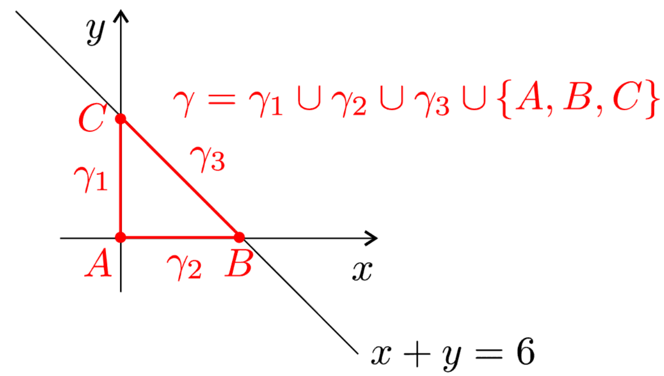
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1: \; x = 0, \; y = t, \; t \in (0, 6); \; f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



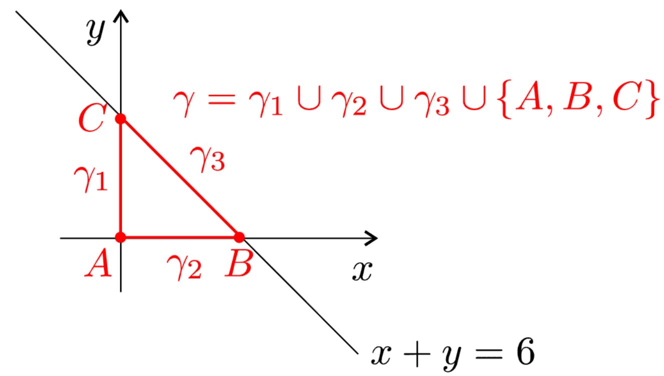
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1: \; x = 0, \; y = t, \, t \in (0, 6); \; f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2: \; x = t, \; y = 0$ pro $t \in (0, 6)$;

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



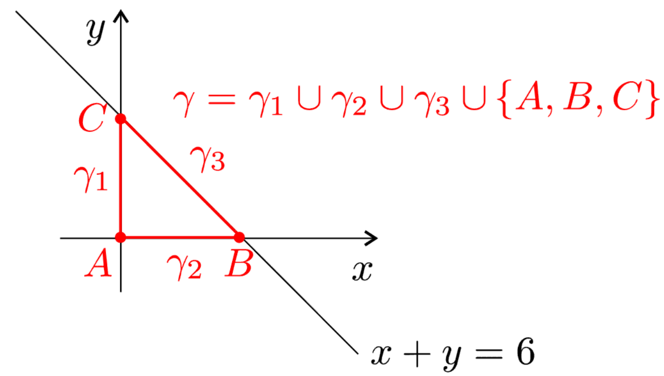
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1 : \; x = 0, \; y = t, \, t \in (0, 6); \; f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2 : \; x = t, \; y = 0$ pro $t \in (0, 6); \; f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0,$

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



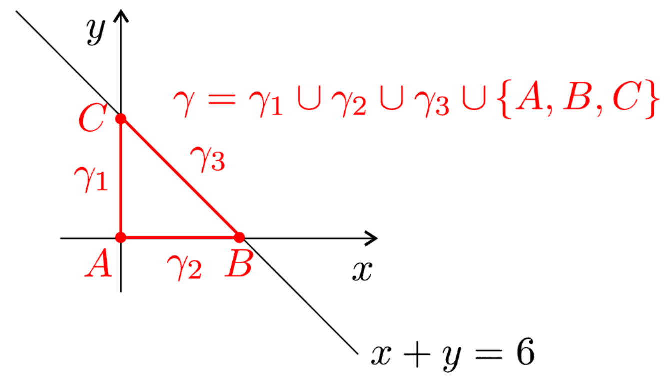
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1: \; x = 0, \; y = t, \, t \in (0, 6); \; f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2: \; x = t, \; y = 0$ pro $t \in (0, 6); \; f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

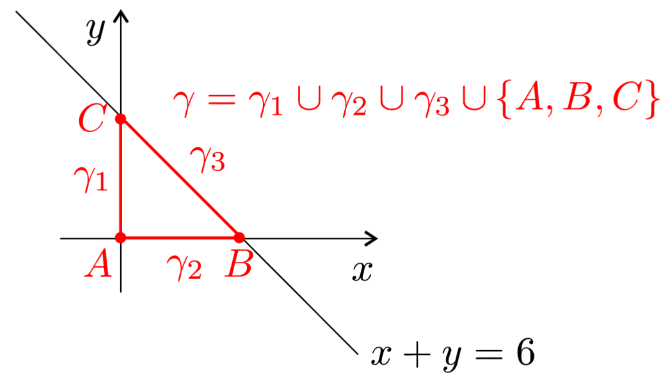
- $\gamma_1: \ x = 0, \ y = t, \ t \in (0, 6); \ f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \ y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2: \ x = t, \ y = 0$ pro $t \in (0, 6); \ f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3: \ x = t, \ y = 6 - t$ pro $t \in (0, 6)$;

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.

Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

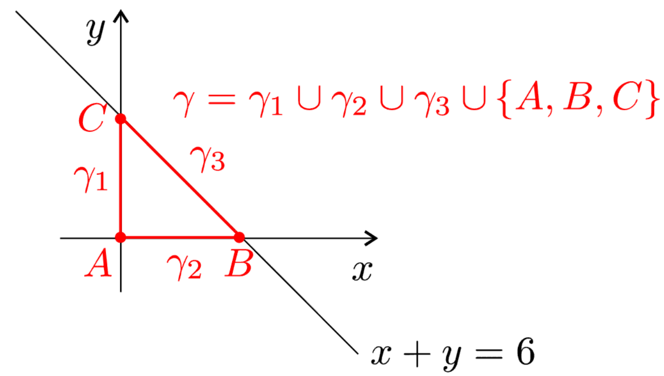


- $\gamma_1: \;\; x = 0, \;\; y = t, \; t \in (0, 6); \; f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2: \;\; x = t, \;\; y = 0$ pro $t \in (0, 6); \; f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0,$ tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3: \;\; x = t, \;\; y = 6 - t$ pro $t \in (0, 6); \; f_3(t) := f(t, 6 - t) =$

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



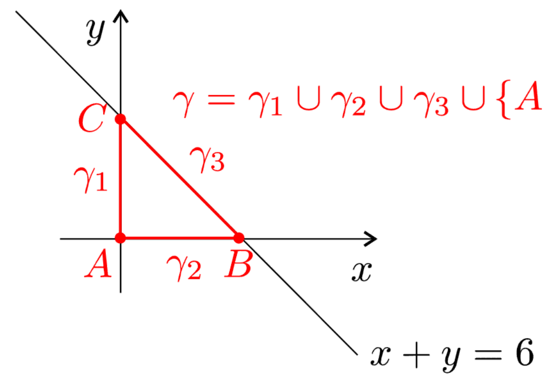
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1: \; x = 0, \; y = t, \, t \in (0, 6); \; f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2: \; x = t, \; y = 0$ pro $t \in (0, 6); \; f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0,$ tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3: \; x = t, \; y = 6 - t$ pro $t \in (0, 6); \; f_3(t) := f(t, 6 - t) = t^3(6 - t) + t^2(6 - t)^2 - 4t^2(6 - t) =$

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



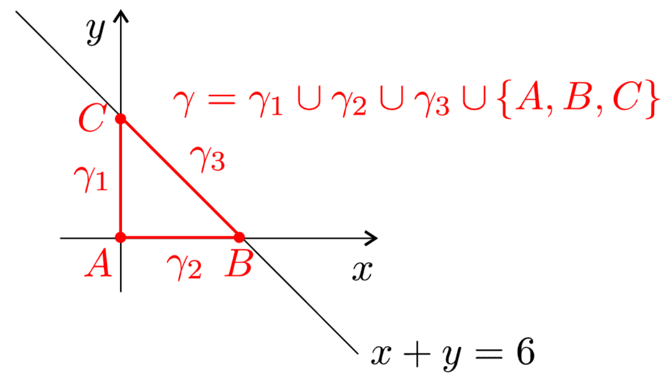
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1 : \; x = 0, \; y = t, \; t \in (0, 6); \; f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2 : \; x = t, \; y = 0$ pro $t \in (0, 6); \; f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3 : \; x = t, \; y = 6 - t$ pro $t \in (0, 6); \; f_3(t) := f(t, 6 - t) = t^3(6 - t) + t^2(6 - t)^2 - 4t^2(6 - t) =$
  $= -2t^3 + 12t^2$,

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

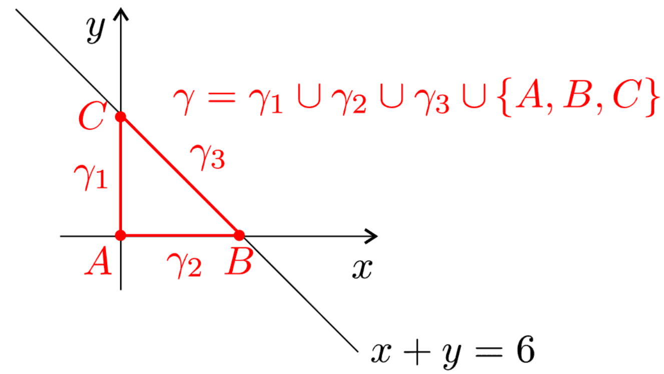
- $\gamma_1 : \ x = 0, \ y = t, \ t \in (0, 6); \ f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \ y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2 : \ x = t, \ y = 0$ pro $t \in (0, 6); \ f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3 : \ x = t, \ y = 6 - t$ pro $t \in (0, 6); \ f_3(t) := f(t, 6 - t) = t^3(6 - t) + t^2(6 - t)^2 - 4t^2(6 - t) =$
  $= -2t^3 + 12t^2, \ f_3'(t) \equiv$

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.

Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

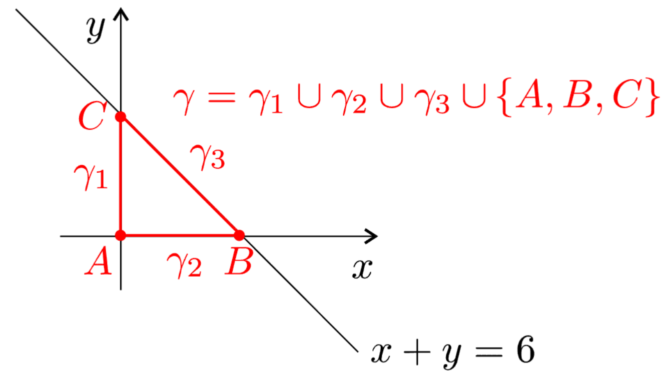


- $\gamma_1: \; x = 0, \; y = t, \; t \in (0,6); \; f_1(t) := f(0,t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0,\; y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2: \; x = t, \; y = 0$ pro $t \in (0,6); \; f_2(t) := f(t,0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3: \; x = t, \; y = 6 - t$ pro $t \in (0,6); \; f_3(t) := f(t, 6-t) = t^3(6-t) + t^2(6-t)^2 - 4t^2(6-t) =$ $= -2t^3 + 12t^2, \; f_3'(t) \equiv \; -6t^2 + 24t$

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



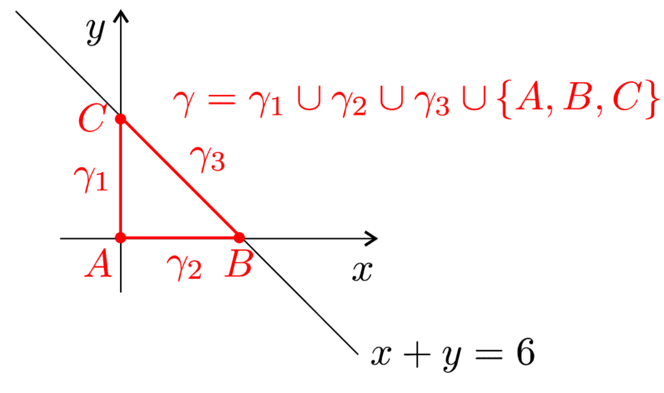
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1 : \ x = 0, \ y = t, \ t \in (0,6); \ f_1(t) := f(0,t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0,\ y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2 : \ x = t, \ y = 0$ pro $t \in (0,6)$; $f_2(t) := f(t,0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3 : \ x = t, \ y = 6 - t$ pro $t \in (0,6)$; $f_3(t) := f(t, 6-t) = t^3(6-t) + t^2(6-t)^2 - 4t^2(6-t) =$
  $= -2t^3 + 12t^2$, $f_3'(t) \equiv \ -6t^2 + 24t = 0 \Rightarrow t(t-4) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \notin (0,6), \ t_2 = 4 \in (0,6)$;

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.



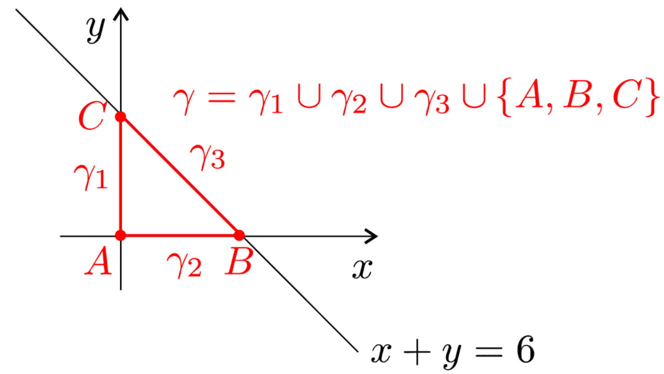
Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1: \ x = 0, \ y = t, \ t \in (0,6); \ f_1(t) := f(0,t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \ y=t} \equiv 0,$

  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2: \ x = t, \ y = 0$ pro $t \in (0,6); \ f_2(t) := f(t,0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3: \ x = t, \ y = 6 - t$ pro $t \in (0,6); \ f_3(t) := f(t, 6-t) = t^3(6-t) + t^2(6-t)^2 - 4t^2(6-t) =$
  $= -2t^3 + 12t^2, \ f_3'(t) \equiv \ -6t^2 + 24t = 0 \Rightarrow t(t-4) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \notin (0,6), \ t_2 = 4 \in (0,6)$; takto nalezená hodnota parametru po dosazení do parametrických rovnic křivky γ_3 vede na další bod podezřelý z extrému $S_2 = [4,2], \ f(S_2) = 64$;

Nyní budeme vyšetřovat extrémy vázané na hranici M.

Protože nejsme schopni uvažovanou hranici popsat jedinou rovnicí, budeme ji vyšetřovat po částech. Jednotlivé strany postupně označme γ_1, γ_2 a γ_3.

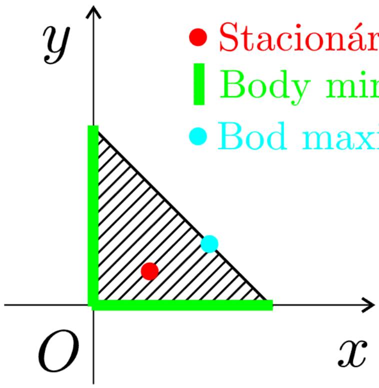


Vrcholy trojúhelníka z našich úvah prozatím vylučme, neboli každou stranu trojúhelníka M uvažujme jako otevřenou úsečku (tj. úsečku bez krajních bodů).

- $\gamma_1 : \ x = 0, \ y = t, \ t \in (0, 6); \ f_1(t) := f(0, t) = x^3y + x^2y^2 - 4x^2y\Big|_{x=0, \ y=t} \equiv 0,$

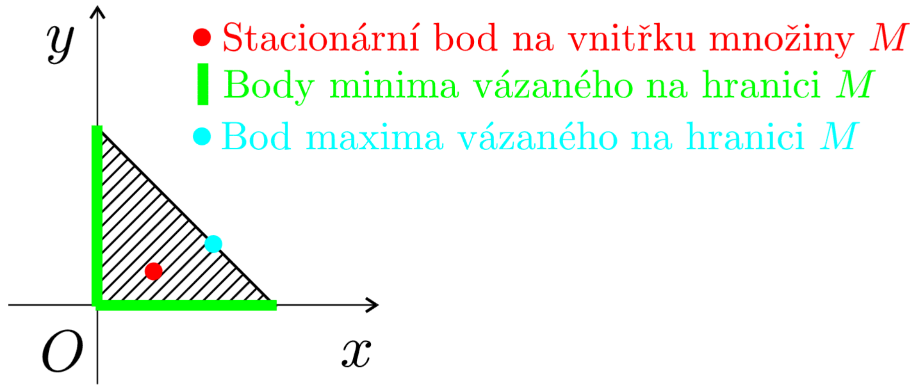
  vyšetřovaná funkce f je konstantní na γ_1, tj. v každém bodě této množiny tedy funkce f nabývá svého vázaného minima a zároveň maxima;
- $\gamma_2 : \ x = t, \ y = 0$ pro $t \in (0, 6); \ f_2(t) := f(t, 0) \equiv 0$, tj. analogie předchozího případu;
- $\gamma_3 : \ x = t, \ y = 6 - t$ pro $t \in (0, 6); \ f_3(t) := f(t, 6 - t) = t^3(6 - t) + t^2(6 - t)^2 - 4t^2(6 - t) = = -2t^3 + 12t^2, \ f_3'(t) \equiv \ - 6t^2 + 24t = 0 \Rightarrow t(t - 4) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \notin (0, 6), \ t_2 = 4 \in (0, 6)$; takto nalezená hodnota parametru po dosazení do parametrických rovnic křivky γ_3 vede na další bod podezřelý z extrému $S_2 = [4, 2], \ f(S_2) = 64$;
- Hodnoty funkce pro $X \in \{A, B, C\}$: $f(A) = f(0, 0) = 0, \ f(B) = f(6, 0) = 0, \ f(C) = f(0, 6) = 0.$

Závěr:



- Stacionární bod na vnitřku množiny M
- Body minima vázaného na hranici M
- Bod maxima vázaného na hranici M

Závěr:



Funkce f má na uzavřené množině M jeden bod absolutního maxima $[4, 2]$, $f(4, 2) = 64$ a jeden bod absolutního minima $[2, 1]$, v tomto bodě je funkční hodnota rovna -4.

Konec