1. Elementární funkce

1.1. **Obecná mocnina.**

$y = x^\alpha$; $\alpha \in (-\infty, \infty)$, definiční obor závisí na α; při racionálním exponentu α klademe $\alpha = \frac{p}{q}$, kde p, q ($q > 0$) jsou nesoudělná čísla.

- α – kladné, racionální číslo; q – liché; p – liché
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ rostoucí spojitá funkce
  - ▷ $\lim\limits_{n\to-\infty} x^\alpha = -\infty$
    $\lim\limits_{n\to\infty} x^\alpha = \infty$
  - ▷ příklad: x^1, x^3, x^5, $x^{\frac{3}{5}}$
- α – kladné, racionální číslo; q – liché; p – sudé
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ klasající spojitá funkce na $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí spojitá funkce na $\langle 0, \infty)$
  - ▷ $\lim\limits_{n\to-\infty} x^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x^\alpha = \infty$
  - ▷ příklad: x^1, x^3, x^5, $x^{\frac{3}{5}}$
- α – kladné, racionální číslo; q – sudé
  - ▷ definiční obor $D(f) = \langle 0, \infty)$
  - ▷ rostoucí funkce na $\langle 0, \infty)$ a spojitá funkce na $(0, \infty)$
  - ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} x^\alpha = \infty$
    $\lim\limits_{n\to 0^+} x^\alpha = 0$
  - ▷ příklad: $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$
- α – kladné, iracionální číslo
  - ▷ definiční obor $D(f) = \langle 0, \infty)$
  - ▷ rostoucí funkce na $\langle 0, \infty)$ a spojitá funkce na $(0, \infty)$
  - ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} x^\alpha = \infty$
    $\lim\limits_{n\to 0^+} x^\alpha = 0$
  - ▷ příklad: $x^{\sqrt{2}}$
- α – záporné, racionální číslo; q – liché; p – liché
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
  - ▷ klesající spojitá funkce na $(\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
  - ▷ $\lim\limits_{n\to-\infty} x^\alpha = 0$
    $\lim\limits_{n\to 0^-} x^\alpha = -\infty$
    $\lim\limits_{n\to 0^+} x^\alpha = \infty$
    $\lim\limits_{n\to\infty} x^\alpha = 0$
  - ▷ příklad: x^{-1}, x^{-3}, $x^{-\frac{1}{3}}$

- α – záporné, racionální číslo; q – liché; p – sudé
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
  - ▷ rostoucí spojitá funkce na $(\infty, 0)$ a klesající spojitá funkce na $(0, \infty)$
  - ▷ $\lim\limits_{n \to -\infty} x^\alpha = 0$
    $\lim\limits_{n \to 0^-} x^\alpha = \infty$
    $\lim\limits_{n \to 0^+} x^\alpha = \infty$
    $\lim\limits_{n \to \infty} x^\alpha = 0$
  - ▷ příklad: x^{-2}, x^{-4}, $x^{-\frac{2}{3}}$
- α – záporné, racionální číslo; q – sudé
  - ▷ definiční obor $D(f) = (0, \infty)$
  - ▷ klesající spojitá funkce
  - ▷ $\lim\limits_{n \to 0^+} x^\alpha = \infty$
    $\lim\limits_{n \to \infty} x^\alpha = 0$
  - ▷ příklad: $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$
- α – záporné, iracionální číslo
  - ▷ definiční obor $D(f) = (0, \infty)$
  - ▷ klesající spojitá funkce
  - ▷ $\lim\limits_{n \to 0^+} x^\alpha = \infty$
    $\lim\limits_{n \to \infty} x^\alpha = 0$
  - ▷ příklad: $x^{-\sqrt{2}}$
- $\alpha = 0$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
  - ▷ $x^0 = 1$
  - ▷ $\lim\limits_{n \to 0^-} x^\alpha = \lim\limits_{n \to 0^+} x^\alpha = 1$

1.2. **Exponenciální funkce.**

$y = a^x$; $a > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.

- $a > 1$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (0, \infty)$
  - ▷ rostoucí spojitá funkce
  - ▷ $\lim\limits_{n \to \infty} a^x = \infty$
    $\lim\limits_{n \to -\infty} a^x = 0$
    $a^0 = 1$
  - ▷ příklad: $a = \frac{3}{2}, e, 10$
- $a = 1$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$

- ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = 1$
- ▷ konstantní funkce
- $0 < a < 1$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (0, \infty)$
  - ▷ klesající spojitá funkce
  - ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} a^x = 0$
    $\lim\limits_{n\to-\infty} a^x = \infty$
    $a^0 = 1$
  - ▷ příklad: $a = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$

1.3. **Logaritmické funkce.**

$y = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0, \infty)$.

- $a > 1$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (0, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ rostoucí spojitá funkce
  - ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x = \infty$
    $\lim\limits_{n\to 0^+} \log_a x = -\infty$
    $\log_a 1 = 0$
    $\log_a a = 1$
  - ▷ poznámka: $\log_e x \equiv \ln x$, $\log_{10} x \equiv \log x$
  - ▷ příklad: $a = \frac{3}{2}, e, 10$
- $0 < a < 1$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (0, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (-infty, \infty)$
  - ▷ klesající spojitá funkce
  - ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x = -\infty$
    $\lim\limits_{n\to 0^+} \log_a x = \infty$
    $\log_a 1 = 0$
    $\log_a a = 1$
  - ▷ příklad: $a = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$

1.4. **Goniometrické funkce.**

- $y = \sin x$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (-1, 1)$

- ▷ spojitá funkce
  rostoucí pro $\frac{1}{2}(4k-1)\pi \leq x \leq \frac{1}{2}(4k+1)\pi$
  klesající pro $\frac{1}{2}(4k+1)\pi \leq x \leq \frac{1}{2}(4k+3)\pi$
- ▷ primitivní perioda – 2π
- ▷ $\sin k\pi = 0$
  $\sin[\frac{1}{2}(4k-1)\pi] = -1$
  $\sin[\frac{1}{2}(4k+1)\pi] = 1$

- $y = \cos x$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (-1, 1)$
  - ▷ spojitá funkce
    rostoucí pro $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$
    klesající pro $2k\pi \leq x \leq (2k+1)$
  - ▷ primitivní perioda – 2π
  - ▷ $\cos[\frac{1}{2}(2k+1)\pi] = 0$
    $\cos 2k\pi = 1$
    $\cos[(2k+1)\pi] = -1$

- $y = \operatorname{tg} x$
  - ▷ definiční obor $D(f) = \displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi \right)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ rostoucí a spojitá funkce v definičních intervalech
  - ▷ primitivní perioda – π
  - ▷ $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}(2k+1)\pi^+} \operatorname{tg} x = -\infty$
    $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}(2k+1)\pi^-} \operatorname{tg} x = \infty$
    $\operatorname{tg} k\pi = 0$

- $y = \operatorname{cotg} x$
  - ▷ definiční obor $D(f) = \displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k\pi, (k+1)\pi)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ klesající a spojitá funkce v definičních intervalech
  - ▷ primitivní perioda – π
  - ▷ $\displaystyle\lim_{x \to k\pi^+} \operatorname{cotg} x = \infty$
    $\displaystyle\lim_{x \to k\pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
    $\operatorname{cotg}[\frac{1}{2}(2k+1)\pi] = 0$

1.5. Cyklometrické funkce.

- $y = \arcsin x$
  - ▷ inverzní funkce k funkci $x = \sin y$ $(-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi)$
  - ▷ definiční obor $D(f) = \langle -1, 1\rangle$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\rangle$
  - ▷ rostoucí a spojitá funkce na celém definičním oboru
- $y = \arccos x$
  - ▷ inverzní funkce k funkci $x = \cos y$ $(0 \leq y \leq \pi)$
  - ▷ definiční obor $D(f) = \langle -1, 1\rangle$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = \langle 0, \pi\rangle$
  - ▷ klesající a spojitá funkce na celém definičním oboru
- $y = \operatorname{arctg} x$
  - ▷ inverzní funkce k funkci $x = \operatorname{tg} y$ $(-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi)$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
  - ▷ rostoucí a spojitá funkce na celém definičním oboru
- $y = \operatorname{arccotg} x$
  - ▷ inverzní funkce k funkci $x = \operatorname{cotg} y$ $(0 < y < \pi)$
  - ▷ definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$
  - ▷ obor funkčních hodnot $H(f) = (0, \pi)$
  - ▷ klesající a spojitá funkce na celém definičním oboru