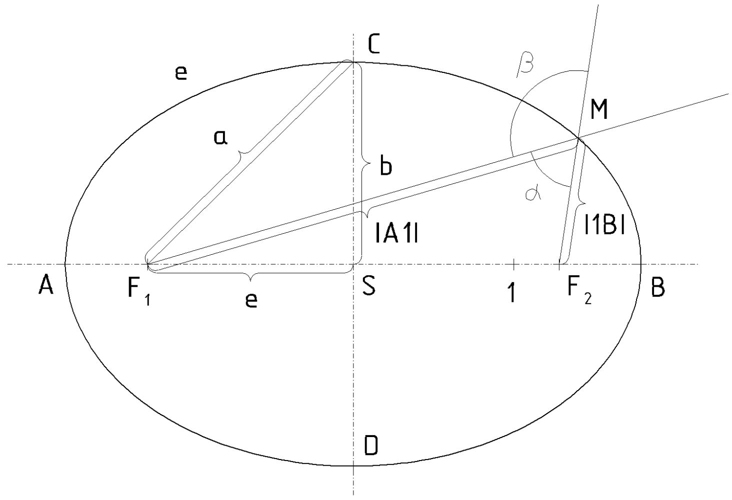
KUŽELOSEČKY

1.1 Elipsa

Definice: Elipsa $\mathcal{E}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od dvou pevných (různých) bodů v $\mathbb{E}_2$, zvaných ohniska (značíme F_1, F_2), stálý součet vzdáleností rovný $2a$, který je větší než vzdálenost obou ohnisek.



$M \in \mathcal{E} \Rightarrow |MF_1|+|MF_2| = 2a$
MF_1, MF_2 : průvodiče
A, B : hlavní vrcholy $\mathcal{E}$
C, D : vedlejší vrcholy $\mathcal{E}$
$AB \cap CD = S$: střed elipsy $\mathcal{E}$
a : velikost hlavní poloosy
b : velikost vedlejší poloosy
$|F_1S|+|F_2S| = e$: excentricita (výstřednost)
$e^2+b^2=a^2$: charakteristický Δ $\mathcal{E}$
$\mathcal{E}$ *má dvě osy souměrnosti*:
AB – hlavní osa
CD – vedlejší osa

M$\in\mathcal{E}$: $\angle F_1MF_2$ – obsahující střed S – nazýváme *vnitřní úhel průvodičů*. K vnitřnímu úhlu průvodičů α se vedlejší úhel β nazývá *vnější úhel průvodičů.*

M$\in\mathbb{E}_2$ libovolný : $|MF_1|+|MF_2| > 2a \Rightarrow M$ je vnějším bodem elipsy $\mathcal{E}$.

$|MF_1|+|MF_2| < 2a \Rightarrow M$ je vnitřním bodem elipsy $\mathcal{E}$.

Věta$_T$: V každém bodě $\mathcal{E}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí vnitřní úhel průvodičů.

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek elipsy $\mathcal{E}$ na její tečny je *vrcholová* kružnice $k(S,a)$.

Věta$_Q$: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy $\mathcal{E}$ (například F_1) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

Poznámka: Dvě křivky 2. stupně mají obecně 4 různé průsečíky. Jestliže dva a více bodů dvou křivek splyne, hovoříme o *soumezných bodech*.

Jestliže má kružnice s elipsou (obecně s křivkou) tři soumezné body, pak se nazývá *oskulační kružnicí*.

Jestliže má kružnice s elipsou (obecně s křivkou) čtyři soumezné body, pak se nazývá *hyperoskulační kružnicí*.

Elipsa má hyperoskulační kružnice jen ve vrcholech.

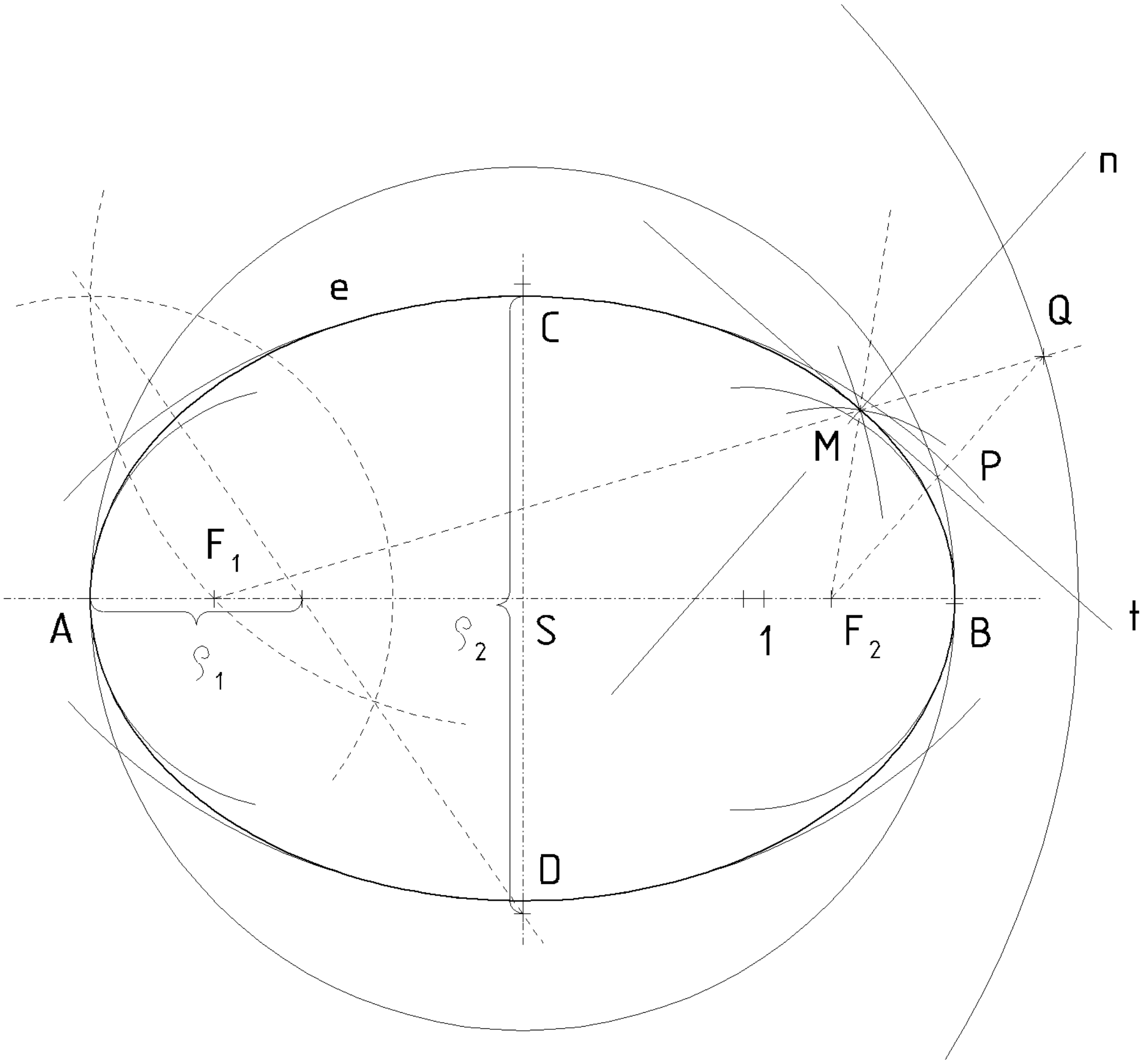
Poznámka: Máme-li elipsu zadanou například $\mathcal{E}$ (F_1, F_2, a), $\mathcal{E}$ (F_1, S, a), $\mathcal{E}$ (A, B, e), můžeme ji bezprostředně vyrýsovat.

Elipsa ovšem může být zadána například $\mathcal{E}$ (t+T, F_1, a), $\mathcal{E}$ (F_1, s^a, t_1, t_2), ..., kde t+T značí zadání elipsy $\mathcal{E}$ tečnou t s bodem dotyku T, s^a značí směr hlavní osy a, atd.

V tomto případě užitím vět **V$_T$**, **V$_P$**, **V$_Q$** nalezneme elementy vedoucí k bezprostřednímu vyrýsování elipsy.

Příklad č. 1: D: $\mathcal{E}$ (F_1, F_2, a), $|F_1F_2| < 2a$

S: sestrojte několik bodů elipsy, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q

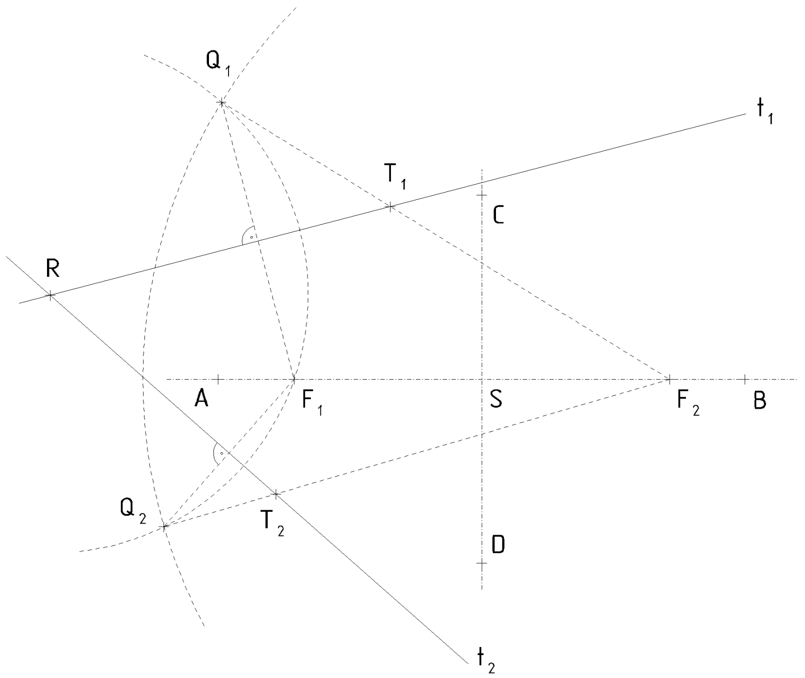


ρ_1 – poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholech A, B.
ρ_2 – poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholech C, D.

Elipsu lze v blízkém okolí vrcholů nahradit hyperoskulačními kružniceni.

Příklad č. 2: D: $\mathcal{E}$ (A, B, e), R

S: sestrojte tečny z bodu R k elipse $\mathcal{E}$, určete body dotyku



Konstrukce:

1) $k_1(F_2, 2a)$
2) $k_2(R, |RF_1|)$
3) $Q = k_1 \cap k_2$
4) t – osa F_1Q
5) $T = t \cap F_2Q$

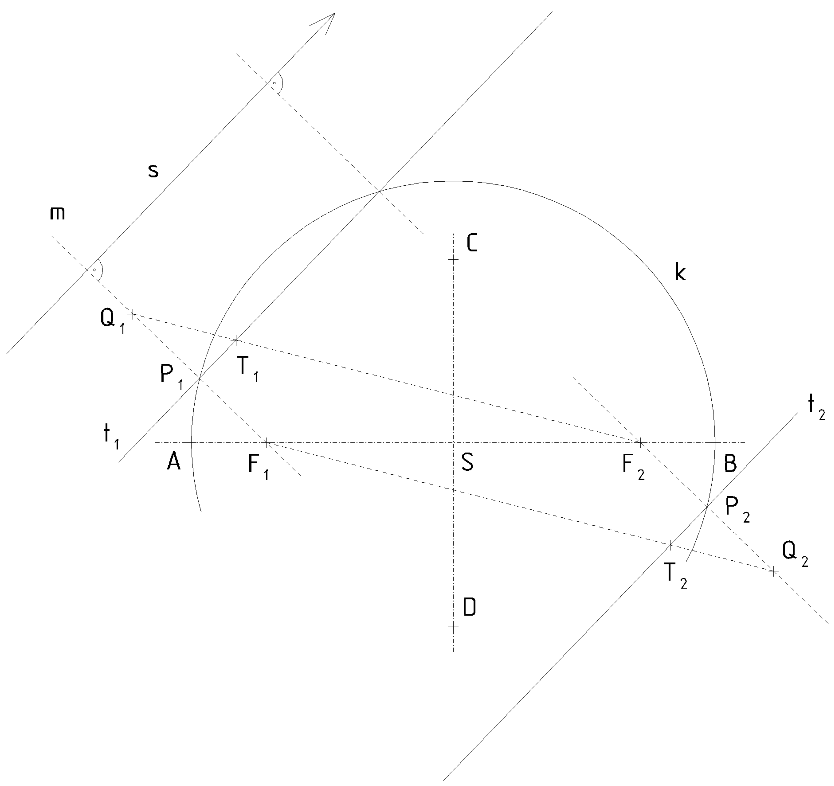
Diskuze:

Počet průsečíku $k_1 \cap k_2$ určuje počet řešení:

- R leží vně $\mathcal{E} \Rightarrow$ 2 řešení
- R leží na $\mathcal{E} \Rightarrow$ 1 řešení
- R leží uvnitř $\mathcal{E} \Rightarrow$ žádné řešení

Příklad č. 3: D: $\mathcal{E}$ (A, B, e), s

S: sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k elipse $\mathcal{E}$, určete body dotyku



Konstrukce“

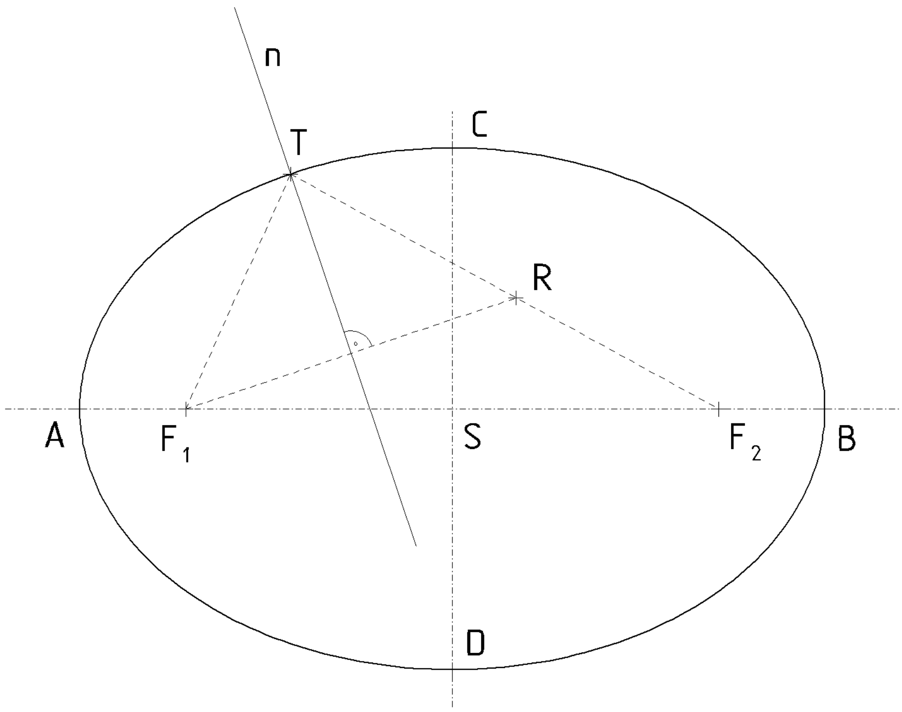
1) m; $F_1 \in m$, $m \perp s$
2) $k(S, a)$
3) $P = k \cap m$
4) t; $P \in t$, $t \parallel s$
5) Q je souměrně sdružený s ohniskem F_1 podle t
6) $T = t \cap F_2Q$

Diskuze:

Počet průsečíku $k \cap m$ určuje počet řešení – v tomto případě existují vždy dvě řešení.

Příklad č. 4: D: $\mathcal{E}\ (F_1, F_2, n)$

S: sestrojte elipsu $\mathcal{E}$

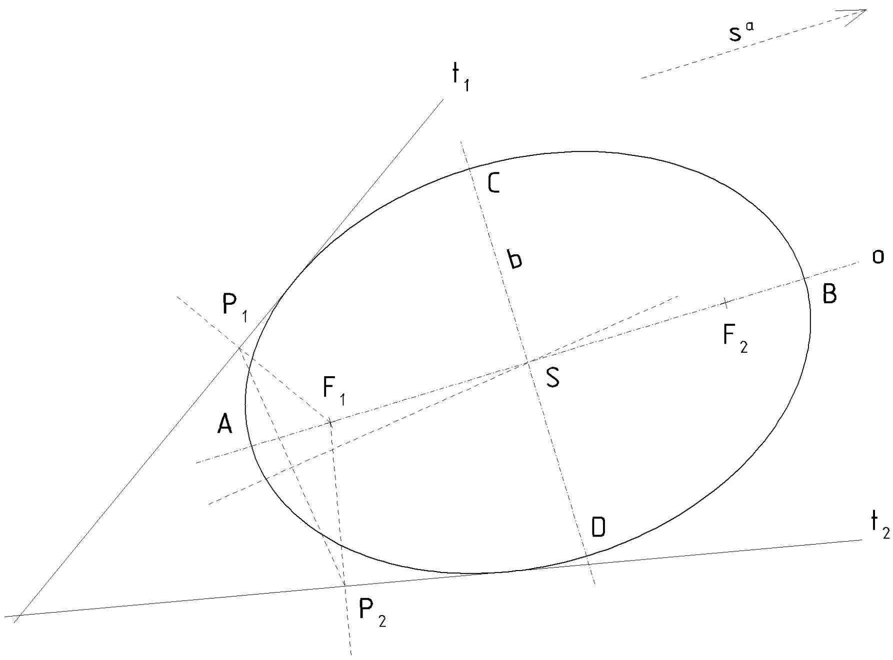


Konstrukce:

1) R; n je osa úsečky F_1R
2) $T = F_2R \cap n$
3) $|F_1T| + |F_2T| = 2a$
4) $\mathcal{E}\ (F_1, F_2, a)$

Příklad č. 5: D: $\mathcal{E}\ (F_1, s^a, t_1, t_2)$

S: sestrojte elipsu $\mathcal{E}$

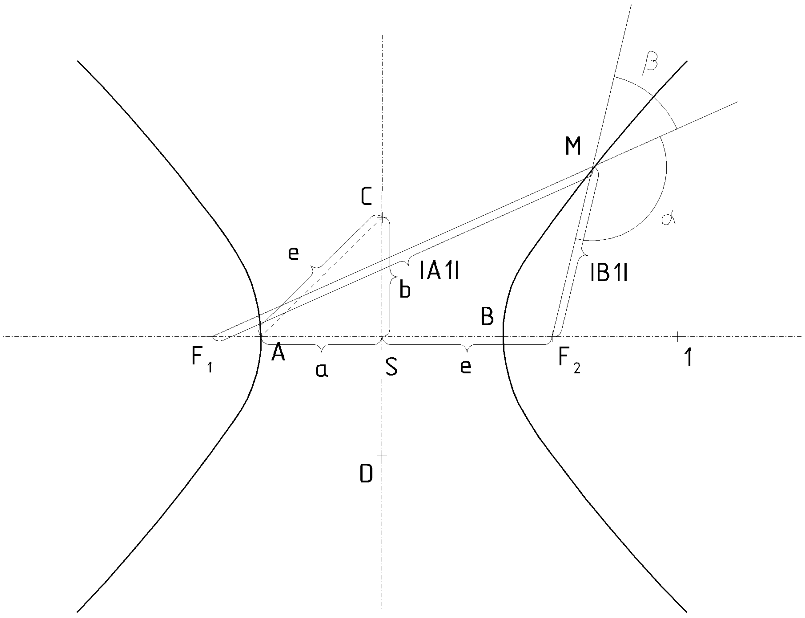


Konstrukce:

1) o; $F_1 \in o$, $o \parallel s^a$
2) P_1 – pata kolmice z F_1 na t_1
3) P_2 – pata kolmice z F_1 na t_2
4) o_1 – osa úsečky P_1P_2
5) $S = o_1 \cap o$
6) $a = |SP_1| = |SP_2|$
7) $\mathcal{E}\ (S, F_1, a)$

1.2 Hyperbola

Definice: Hyperbola $\mathcal{H}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od dvou pevných (různých) bodů v $\mathbb{E}_2$, zvaných ohniska (značíme F_1, F_2), stálý rozdíl vzdáleností rovný $2a$, který je menší než vzdálenost obou ohnisek.



$M \in \mathcal{H} \Rightarrow ||MF_1|-|MF_2|| = 2a$
$|MF_1|-|MF_2| = 2a$ nebo
$|MF_2|-|MF_1| = 2a \Rightarrow$
$\mathcal{H}$ má dvě větve
MF_1, MF_2 : průvodiče
A, B : hlavní vrcholy $\mathcal{H}$
C, D : vedlejší vrcholy$\mathcal{H}$,
vedlejší vrcholy C, D neleží na $\mathcal{H}$
$AB \cap CD = S$: střed hyperboly $\mathcal{H}$
a : velikost hlavní poloosy
b : velikost vedlejší poloosy
$|F_1S|+|F_2S| = e$: excentricita (výstřednost)
$e^2= a^2+b^2$: charakteristický Δ $\mathcal{H}$
$\mathcal{H}$ má *dvě osy souměrnosti*:
AB – hlavní osa
CD – vedlejší osa

M$\in\mathcal{H}$: $\angle F_1MF_2$ – obsahující střed S – nazýváme *vnější úhel průvodičů*. K vnějšímu úhlu průvodičů β se vedlejší úhel α nazývá *vnitřní úhel průvodičů.*

M$\in\mathbb{E}_2$ libovolný : $||MF_1|-|MF_2|| < 2a \Rightarrow M$ je vnějším bodem hyperboly $\mathcal{H}$.

$||MF_1|-|MF_2|| > 2a \Rightarrow M$ je vnitřním bodem hyperboly $\mathcal{H}$.

Tečna v nevlastním bodě $\mathcal{H}$ se nazývá asymptota – hyperbola $\mathcal{H}$ má dvě asymptoty. Asymptoty p, q jsou úhlopříčkami v obdélníku o středních příčkách AB, CD.

Hyperbola $\mathcal{H}$ se nazývá rovnoosá $\Leftrightarrow a = b.$

Hyperbola má hyperoskulační kružnice v hlavních vrcholech.

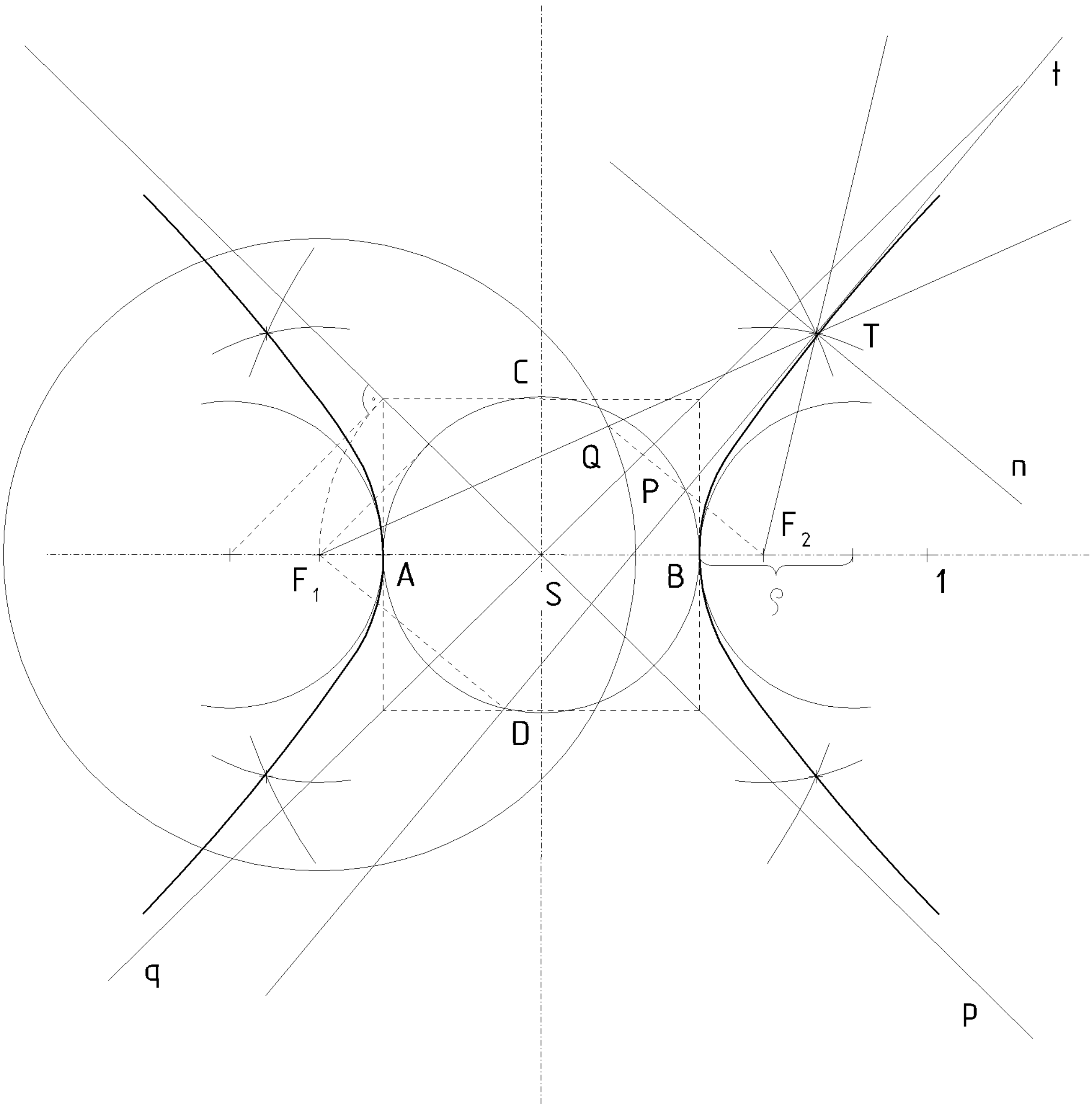
Věta$_T$: V každém bodě $\mathcal{H}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí vnitřní úhel průvodičů.

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly $\mathcal{H}$ na její tečny je *vrcholová* kružnice $k(S,a)$.

Věta$_Q$: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly $\mathcal{H}$ (například F_1) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

Příklad č. 6: D: $\mathcal{H}$ (F_1, F_2, a), $|F_1F_2| > 2a$

S: sestrojte několik bodů hyperboly, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{H}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q

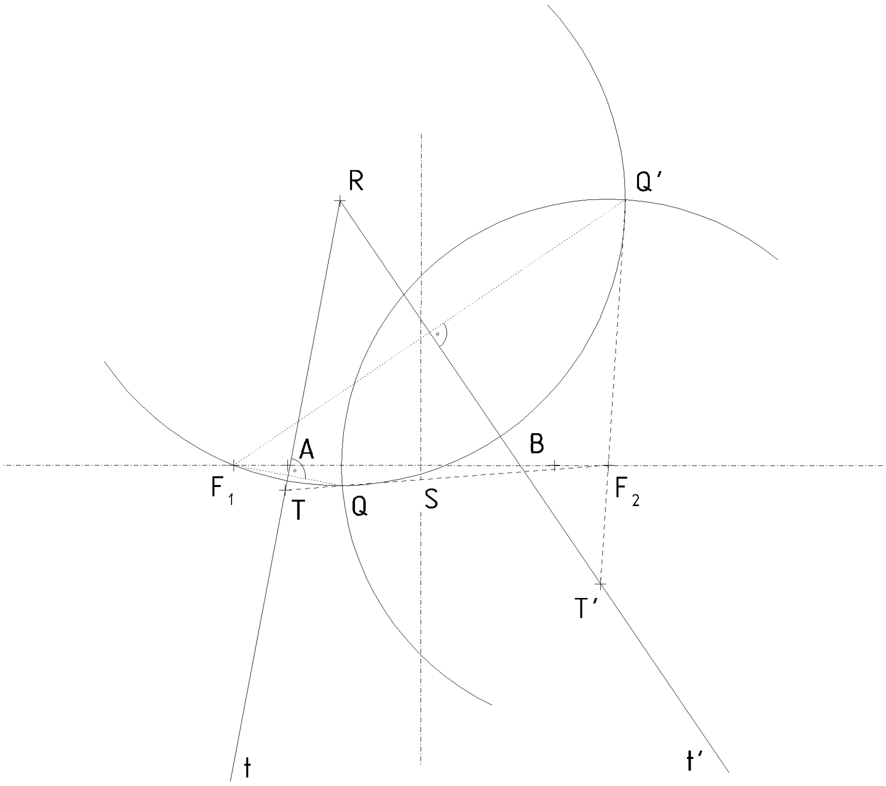


ρ – poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholech A, B.

Příklad č. 7: D: $\mathcal{H}$ (F_1, F_2, A), R

S: sestrojte tečny z bodu R k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku

Rozbor i konstrukce stejná jako v Příkladu 2 pro $\mathcal{E}$.

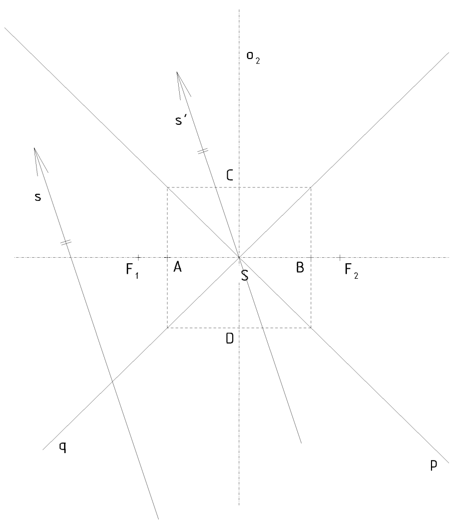


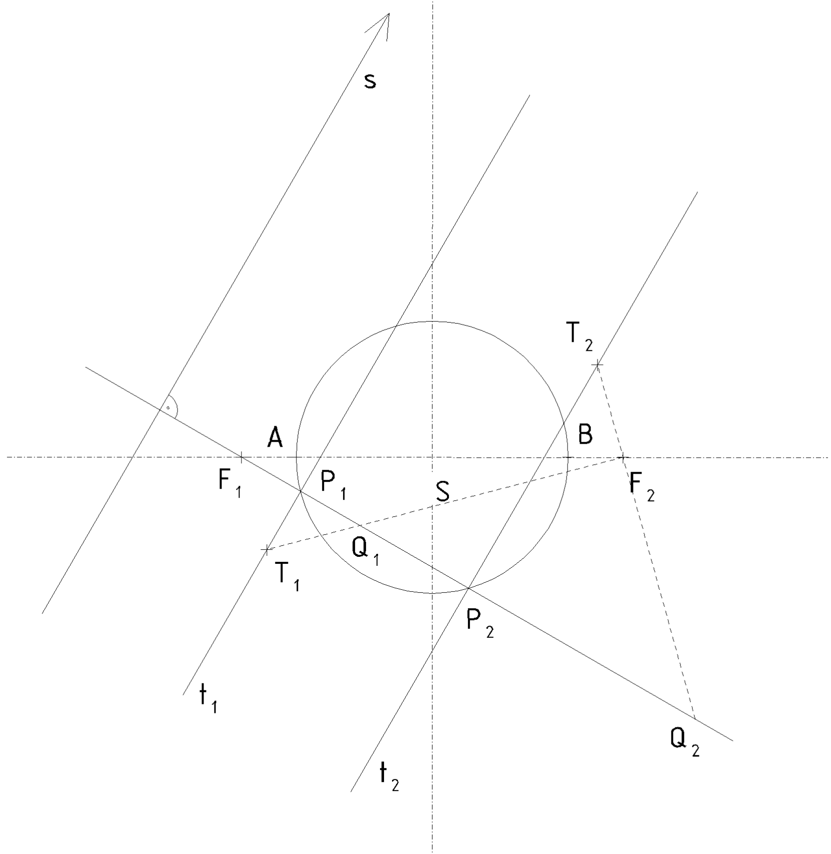
Příklad č. 8: D: $\mathcal{H}$ (A, B, e), s

S: sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku

Rozbor i konstrukce stejná jako v Příkladu 3 pro $\mathcal{E}$.

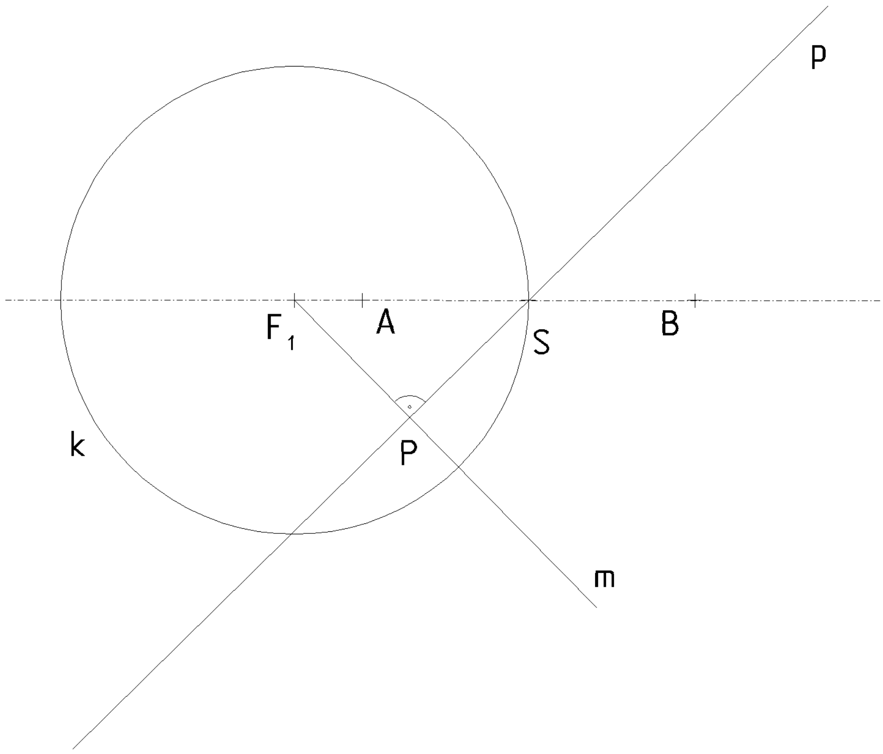
Úloha nemá řešení pro směr s, pokud s', kde $s' \parallel s$, $S \in s'$, neleží v úhlu asymptot obsahující vedlejší osu hyperboly $\mathcal{H}$.





Příklad č. 9: D: $\mathcal{H}$ (F, p, e)

S: sestrojte hyperbolu $\mathcal{H}$

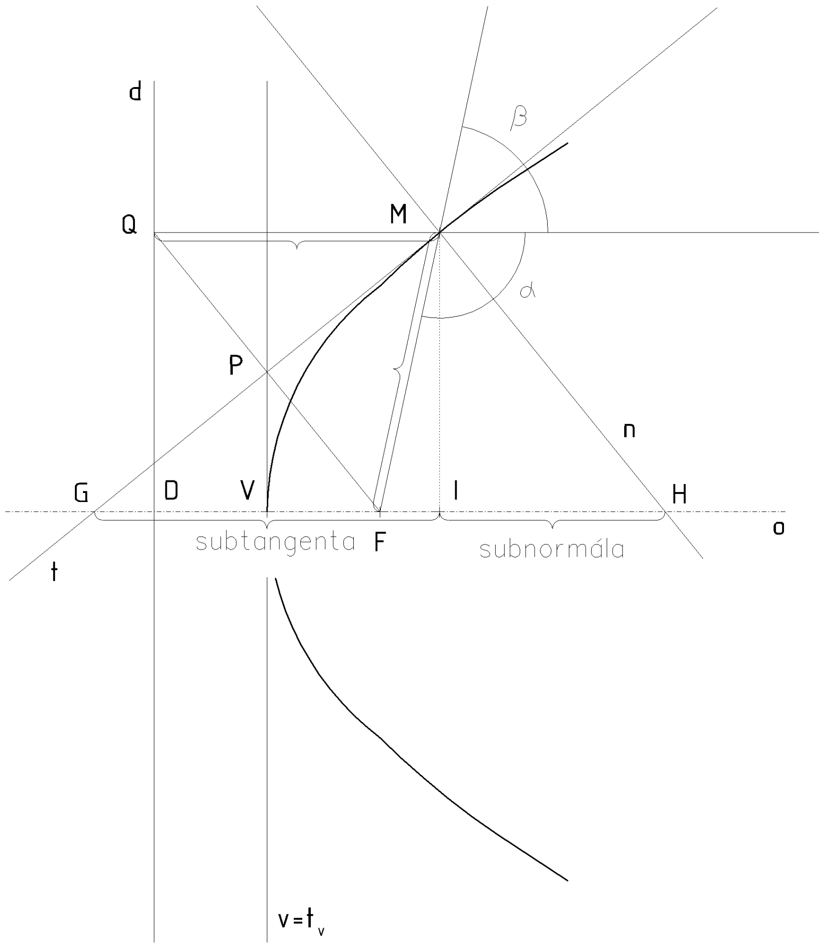


Konstrukce:

1) m; $F \in m$, $m \perp p$
2) $P = m \cap p$
3) $k(F, e)$
4) $S = k \cap p$
5) $a = |PS|$
6) $\mathcal{H}$ (F, S, a)

1.3 Parabola

Definice: Parabola $\mathcal{P}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od pevného bodu F v $\mathbb{E}_2$, zvaného ohnisko, a pevné přímky d, zvané řídící přímka, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.



$M \in \mathcal{P} \Rightarrow |MF| = d(M, d)$

Q – pata kolmice z M na d

FM, MQ : průvodiče

o; $F \in o$, $o \perp d$: osa paraboly $\mathcal{P}$

$D = o \cap d$

V, $V = |FD|/2$: vrchol paraboly $\mathcal{P}$

$p = |DF| = d(F, d)$: parametr $\mathcal{P}$

$M \in \mathcal{P}$: $\angle FMQ$ – obsahující vrchol V – nazýváme *vnější úhel průvodičů*. K vnějšímu úhlu průvodičů β se vedlejší úhel α nazývá *vnitřní úhel průvodičů.*

$M \in \mathbb{E}_2$ libovolný :

$|MF| > d(M, d) \Rightarrow M$ je vnějším bodem paraboly $\mathcal{P}$.

$|MF| < d(M, d) \Rightarrow M$ je vnitřním bodem paraboly $\mathcal{P}$.

$|GI|$ se nazývá *subtangenta*

$|IH|$ se nazývá *subnormála*

Tečna $t_V \equiv v$ ve vrcholu V paraboly $\mathcal{P}$ se nazývá *vrcholová tečna*, $v \perp o$, $v \parallel d$.

Parabola má hyperoskulační kružnici ve vrcholu V s poloměrem $\rho = p$.

Věta$_T$: V každém bodě $\mathcal{P}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí vnitřní úhel průvodičů. $\Rightarrow t_V \parallel d$

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohniska F paraboly $\mathcal{P}$ na její tečny je vrcholová tečna t_V.

Věta$_Q$: Množina bodů Q, souměrně sdružených s ohniskem F podle tečen paraboly $\mathcal{P}$, je řídící přímka d.

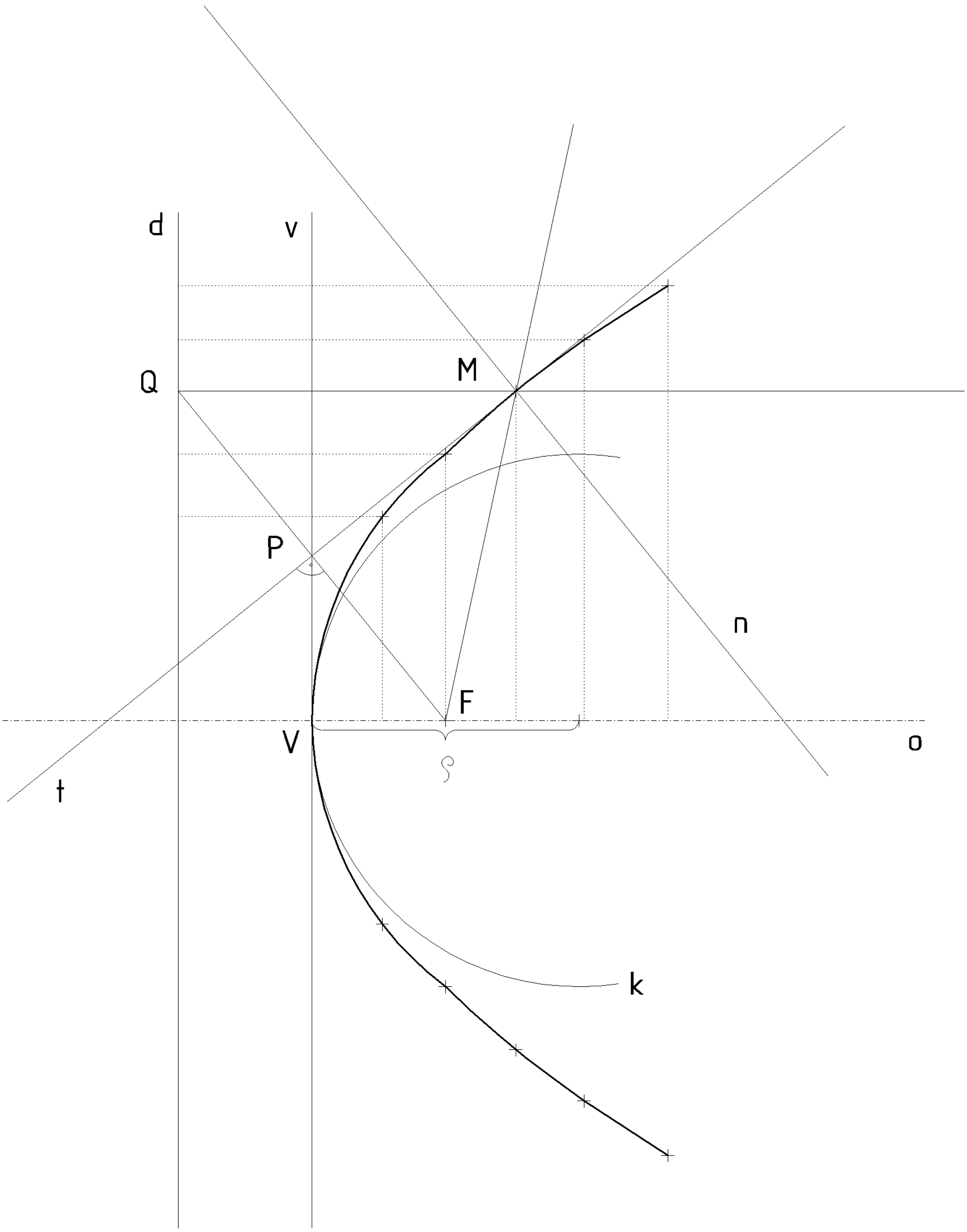
Věta: Subtangenta je půlena vrcholem V.

Věta: Délka subnormály je rovna velikosti parametru p.

Věta: Součet subtangenty a subnormály je půlen ohniskem F.

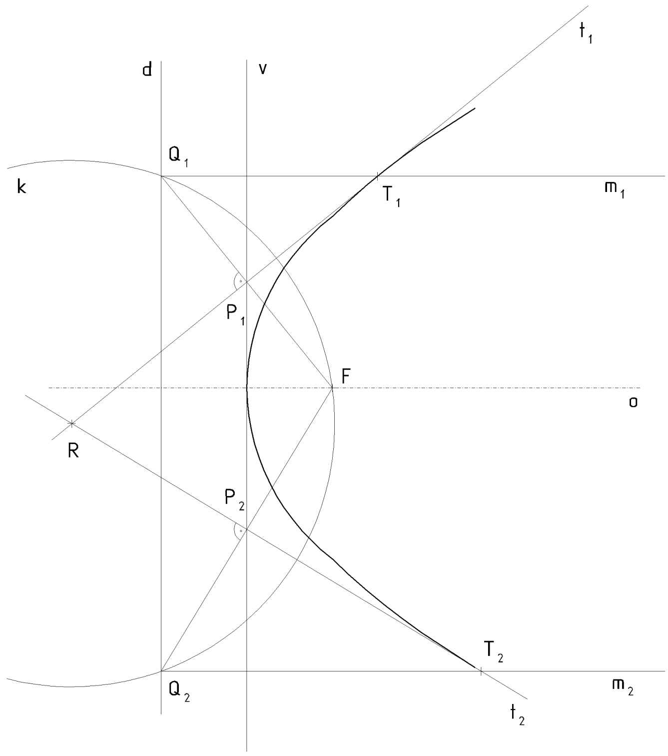
Příklad č. 10: D: $\mathcal{P}$ (F, d)

S: sestrojte několik bodů paraboly, hyperoskulační kružnici, tečnu v libovolném bodě $M \in \mathcal{P}$, zkonstruujte přímky z vět V_P, V_Q



Příklad č. 11: D: $\mathcal{P}$ (F, d), R

S: sestrojte tečny z bodu R k parabole $\mathcal{P}$, určete body dotyku

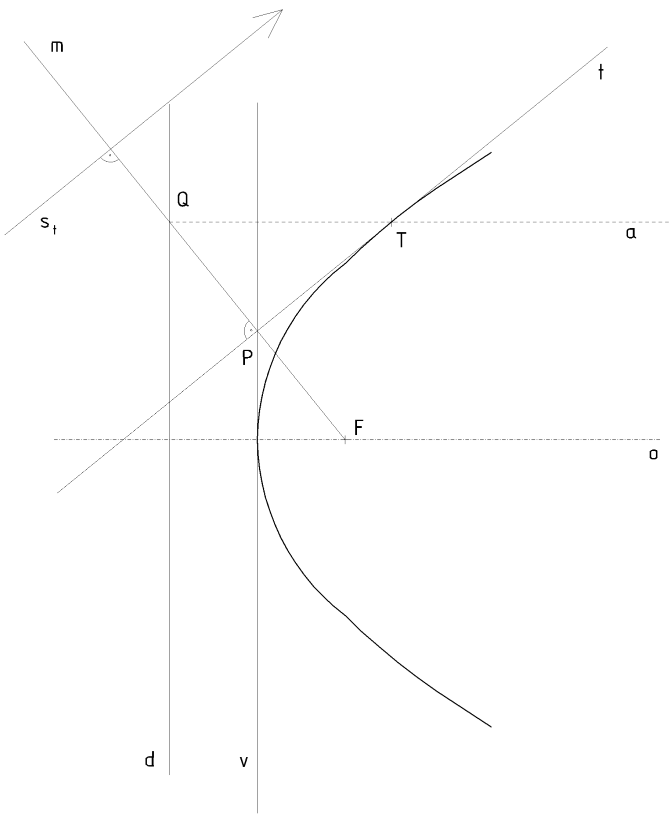


Konstrukce:

1) $|RF| = |RQ|$
2) $k(R, |RF|)$
3) $Q = d \cap k \Rightarrow$ výsledek určuje počet řešení
4) t; $R \in t$, $t \perp FQ$
5) m; $Q \in m$, $m \perp d$
6) $T = m \cap t$

Příklad č. 12: D: $\mathcal{P}$ (F, d), s

S: sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k parabole $\mathcal{P}$, určete body dotyku

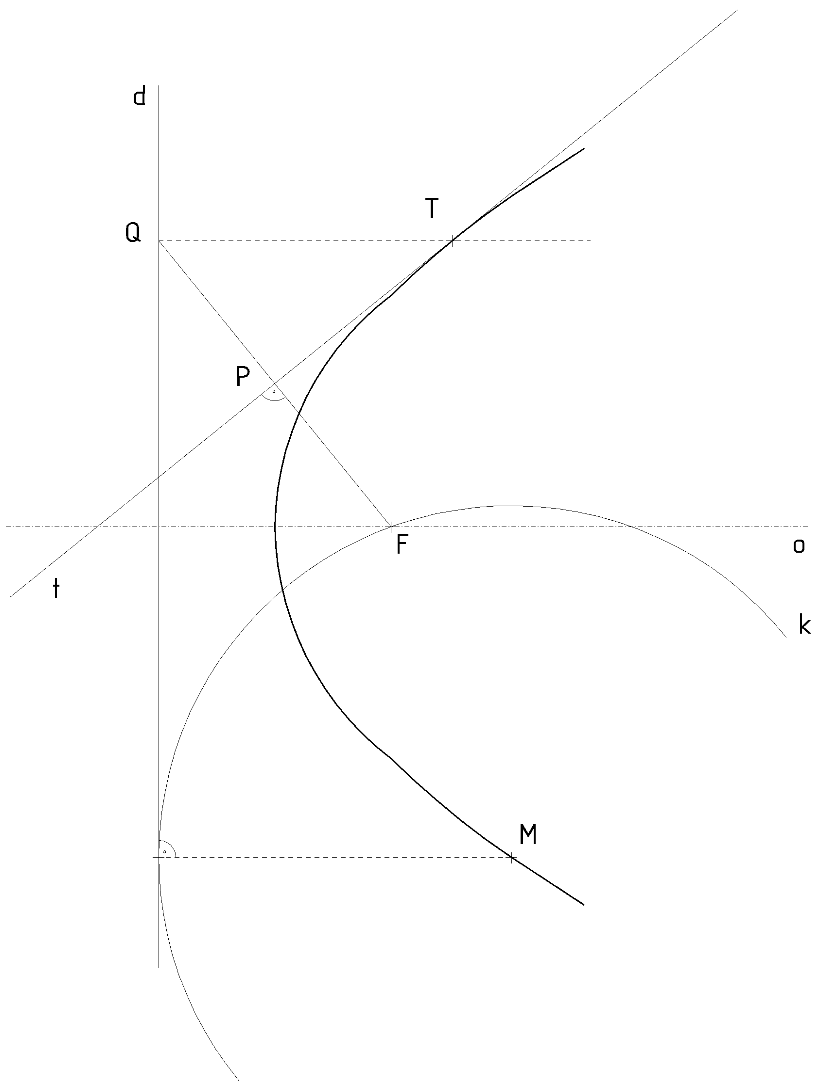


Konstrukce:

1) m; $F \in m$, $m \perp s$
2) v
3) $P = m \cap v$
4) t; $P \in t$, $t \parallel s$
5) $Q = m \cap d$
6) a; $Q \in a$, $a \perp d$
7) $T = a \cap t$

Příklad č. 13: D: $\mathcal{P}$ (F, M, t)

S: sestrojte parabolu $\mathcal{P}$



Konstrukce:

1) d(M, d) = d(M, F)
2) m; $F \in m$, $m \perp t$
3) Q – souměrně sdružený bod s F podle t
4) k(M, |MF|)
5) d = tečna z Q ke k
6) $\mathcal{P}$ (F, d)