Příklad 3.1. Vypočtěte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \arctan \frac{y}{x}$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
z'_x &= \left(\arctan\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};\\
z'_y &= \left(\arctan\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};\\
z''_{xx} &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x\\
&= -y\cdot\left[(x^2+y^2)^{-1}\right]'_x = y(x^2+y^2)^{-2}\,(x^2+y^2)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\\
z''_{xy} &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y\\
&= -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\\
z''_{yx} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\\
z''_{yy} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y\\
&= x\cdot\left[(x^2+y^2)^{-1}\right]'_y = -x(x^2+y^2)^{-2}\,(x^2+y^2)'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$