Příklad 4.1. Napište Taylorův polynom druhého stupně v bodě $A = [-1, 2]$ pro funkci

$$z = \frac{y^2}{x^2}.$$

Řešení.

$$\begin{array}{rcl|l}
z &=& \dfrac{y^2}{x^2} & z(A) = 4 \\
z'_x &=& \left(\dfrac{y^2}{x^2}\right)'_x = y^2 \left(x^{-2}\right)'_x = -\dfrac{2y^2}{x^3} & z'_x(A) = 8 \\
z'_y &=& \left(\dfrac{y^2}{x^2}\right)'_y = x^{-2} \left(y^2\right)'_y = \dfrac{2y}{x^2} & z'_y(A) = 4 \\
z''_{xx} &=& \left(-\dfrac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \left(x^{-3}\right)'_x = \dfrac{6y^2}{x^4} & z''_{xx}(A) = 24 \\
z''_{xy} &=& \left(-\dfrac{2y^2}{x^3}\right)'_y = -2x^{-3} \left(y^2\right)'_y = -\dfrac{4y^2}{x^3} & z''_{xy}(A) = 8 \\
z''_{yy} &=& \left(\dfrac{2y}{x^2}\right)'_y = 2x^{-2}(y)'_y = \dfrac{2}{x^2} & z''_{yy}(A) = 2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
T_2(X) &= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + \\
&\quad + 12(x+1)^2 + 8(x+1)(y-2) + (y-2)^2 = \\
&= 4 + 16\,x + 8\,y + 12\,x^2 + 8\,xy + y^2
\end{aligned}$$

Komentář. Taylorův polynom $n-$tého stupně v bodě $A = [a_1, a_2]$ pro funkci $z = f(x, y)$ je daný vzorcem

$$T_n(X) = z(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k z\,(A)(X),$$

kde $d^k z\,(A)(X)$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí *totální diferenciál k-tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v daném bodě A na směr $X - A = (x - a_1, y - a_2)$.* Speciálně pro $n = 1$, respektive $n = 2$ nebo $n = 3$

$$\begin{aligned}
T_1(X) &= z(A) + dz\,(A)(X), \\
T_2(X) &= z(A) + dz\,(A)(X) + \frac{1}{2} d^2 z\,(A)(X), \\
T_3(X) &= z(A) + dz\,(A)(X) + \frac{1}{2} d^2 z\,(A)(X) + \frac{1}{6} d^3 z\,(A)(X),
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
dz\,(A)(X) &= z'_x(A)(x-a_1)+z'_y(A)(y-a_2),\\
d^2z\,(A)(X) &= z''_{xx}(A)(x-a_1)^2+2z''_{xy}(A)(x-a_1)(y-a_2)+z''_{yy}(A)(y-a_2)^2,\\
d^3z\,(A)(X) &= z'''_{xxx}(A)(x-a_1)^3+3z'''_{xxy}(A)(x-a_1)^2(y-a_2)+\\
&\quad +3z'''_{xyy}(A)(x-a_1)(y-a_2)^2+z'''_{yyy}(A)(y-a_2)^3
\end{aligned}$$