1. Dvojný integrál

Vypočtěte:

1.1 $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy$, kde $D = \{[x,y] \in R^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2\}$.

[*polární souřadnice, meze konstantní, restrikce lze použít, substituce* $\ln\rho = t$. *Výsledek:* 2π]

1.2 Statický moment S_y pro homogenní oblast D vymezenou křivkou $y = \sin x$ a úsečkou spojující body $[0,0], [\frac{\pi}{2}, 1]$. (Hustota pro homogenní oblast $\sigma(x,y) \equiv k \in R^+$.)

[*bez transformace, nekonstantí meze proměnné y, "per partes". Výsledek:* $k(1 - \frac{\pi^2}{12})$]

1.3 Těžiště T homogenní oblasti $D = \{[x,y] \in R^2; x^2+y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$. $(r > 0)$

[*polární souřadnice, konstantní meze, restrikce možná;* $T = \ 0, \frac{4r}{3\pi}$, x_T *ihned.*]

1.4 Hmotnost rovnoběžníka D vymezeného přímkami $y = x, y = x+2, y = 2, y = 6$ s hustotou $\sigma(x,y) = x^2+y^2$.

[*bez transformace, pozor na meze prommené x; vyjde* 224]

1.5 $\iint_D (9x^2+4y^2+4) dxdy$, kde $D = \{[x,y] \in R^2; 9x^2+4y^2 \leq 36\}$.

[*zobecněné polární souřadnice, konstantní meze, restrikce možná;* 132π]

1.6 Obsah plochy obrazce $D = \{[x,y] \in R^2; x^2+y^2 \leq 4y, x^2+y^2 \geq 2y, x \geq 0, y \geq \sqrt{3}x\}$.

[*polární souřadnice, pozor na nekonstantní meze proměnné ρ;* $\frac{1}{2} \ \ \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$]

1.7 $\iint_D (2x - y + 3) dxdy$, kde $D = \{[x,y] \in R^2; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x, y \leq \frac{4}{x}\}$.

[*bez transformace, nutno rozdělit na 2 integrály;* $24 + 12\ln 2$]

1.8 Moment setrvačnosti I_y homogenní oblasti $D = \{[x,y]; 6x+y \geq 6, 2x+y \leq 6, y \geq 0\}$.

[*bez transformace, který způsob (pořadí) integrace je lepší? Vyjde* $13k$]

1.9 $\iint_D xy^2 dxdy$, kde oblast D je vymezena parabolou $y^2 = 2px$ a částí přímky $x = \frac{p}{2}$. $(p > 0)$

[*bez transformace, můžeme použít restrikce;* $\frac{p^5}{21}$]

1.10 Objem tělesa $\Omega = \{[x,y,z] \in R^3; x^2+y^2+z^2 \leq r^2, x^2+y^2+(z-r)^2 \leq r^2\}$.

[*těžší příklad, polární souřadnice s konstantními mezemi, restrikce lze 8x, subst.* $\sqrt{\cdots} = t$; $\frac{5\pi r^3}{12}$]

1.11 Objem tělesa Ω ohraničeného plochami $az = a^2 - x^2 - y^2, z = 0$. $(a > 0)$

[*polární souřadnice, restrikci lze použít, nakreslete si také zde obrázky v* R^3 *i v rovině xy;* $\frac{\pi a^3}{2}$]

1.12 Objem tělesa Ω ohraničeného plochami $z = x^2+y^2, z = 0, x = 0, y = 0, x+y = 1$.

[*bez transformace, stačí obrázek projekce do roviny xy* $(x = 0, y = 0, x+y = 1)$; *snadno vyjde* $\frac{1}{6}$]

1.13 Obsah plochy rotačního paraboloidu $x^2+y^2 = 2z$ uvnitř válce $x^2+y^2 \leq 1$.

[*polární souřadnice, konstantní meze, restrikce lze použít, subst. "odmocninová";* $\frac{2\pi}{3} \ \ 2\sqrt{2} - 1$]

1.14 Obsah plochy $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ uvnitř kužele $3x^2+3y^2 = z^2$.

[*polární souřadnice, opět si nakreslete obrázek v* R^3 *i v souř. rovině xy, restrikce lze;* $4\pi \ \ 2 - \sqrt{3}$]

1.15 Težiště homogenní oblasti $D = \{[x,y] \in R^2; x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x+1\}$.

[*bez transformace, které pořadí integrace je jednodušší?* 2x *subst. metoda;* $T = \left[\frac{2}{3\pi+6}, \frac{2}{\pi+2}\right]$]

1.16 Souřadnici x_T těžiště $T \equiv [x_T, y_T]$ oblasti $D = \{[x,y] \in R^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ s danou hustotou $\sigma(x,y) = xy$.

[*polární souřadnice; bez problémů vyjde* $\frac{124(4-\sqrt{2})}{225}$]

1.17 Moment setrvačnosti I_z homogenní oblasti D ohraničené přímkami $x+y=2, x=2$ a $y=2$.

[bez transformace; snadno vyjde $8k$ *]*

1.18 Momenty setrvačnosti I_x, I_y, I_z homogenní oblasti $D=\{[x,y]\in R^2; x^2\le y\le x\}$

[bez transformace; integrací polynomů bez problémů $I_x=\frac{k}{28}, I_y=\frac{k}{20}, I_z=\frac{3k}{35}$ *]*

1.19 $\iint_D(x^2+y^2)dxdy$, je-li $D=\{[x,y]\in R^2; x^2+y^2\le a^2, y\ge x\}$. $(a>0)$

[polární souřadnice s konstantními mezemi, můžeme i restrikcí; $\frac{\pi a^4}{4}$ *]*

1.20 Težiště oblasti $D=\{[x,y]\in R^2; 4x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$ s danou hustotou $\sigma(x,y)=x$.

[zobecněné polární souřadnice; snadno vyjde $T=\ \frac{3\pi}{16}, \frac{3}{4}$ *]*

1.21 Objem tělesa Ω vymezeného plochami $x^2+y^2=4z, z=4$.

[polární souřadnice, nakreslete si obrázek v R^3 *i projekci, nejlépe restrikcí;* 32π *]*

1.22 Objem tělesa Ω vymezeného plochami $x^2+y^2=1, z=0, z=\sqrt{x^2+y^2+1}$.

[polární souřadnice, stačí obrázek projekce, jaké jsou meze proměnné z? Restrikcí; $\frac{2\pi}{3}\ \ 2\sqrt{2}-1$ *]*

1.23 Obsah části plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nad oborem $D=\{[x,y]; x^2+y^2\le 2y\}$.

[pokud si napíšete správně integrand, pak vyjde okamžitě: $\sqrt{2}\pi$ *]*

1.24 Hmotnost oblasti $D=\{[x,y]; \frac{1}{4}(x-3)^2+(y-1)^2\le 1\}$ s danou hustotou $\sigma(x,y)=(x-3)^2(y-1)^2$.

[zobecněné polární souřadnice s posunutím do počátku, raději bez restrikce; vyjde $\frac{\pi}{3}$ *]*

1.25 Objem tělesa Ω vymezeného plochami $x^2=y, x^2=4-3y, z=0, z=9$.

[nakreslete si projekci do roviny xy $\ x^2=y, x^2=4-3y\ $, *bez transformace, restrikce ano;* 16 *]*

1.26 Těžiště T oblasti $D=\{[x,y]; x^2+\frac{y^2}{4}\ge 1, x^2+\frac{y^2}{4}\le 4, y\ge 0\}$ s hustotou $\sigma(x,y)=x^2$.

[zobec. polár. souřadnice $x=\rho\cos\varphi, y=2\rho\sin\varphi$, *pozor na meze* ρ, *restrikce lze;* $T=\ 0, \frac{992}{225\pi}$ *]*

1.27 Objem tělesa Ω vymezeného plochami $z=\frac{4}{x^2+y^2}, z=0, x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$.

[stačí projekce do roviny xy (mezikruží) (zkuste obr. i v R^3*), polár. souřadnice s restrikcí;* $8\pi\ln 2$ *]*

1.28 Obsah plochy $z=x^2+y^2$ uvnitř válce $x^2+y^2=r^2$. $(r>0)$

[nakreslete si obrázek v R^3 *i projekci, polární souřadnice s restrikcí, substituce "odmocninová", upravíte-li dobře integrand, pak bez problémů vyjde* $\frac{\pi}{6}\ \ (1+4r^2)^{\frac{3}{2}}-1$ *]*

1.29 Obsah rovinného obrazce $D=\{[x,y]; y\ge\frac{1}{x}, y\ge 4x, y\le 8\}$.

[bez transformace, které pořadí integrace je lepší? Meze x nekonstantní; vyjde $\frac{15}{2}-2\ln 2$ *]*

1.30 Moment setrvačnosti I_y homogenního kruhu $D=\{[x,y]; (x-a)^2+y^2\le a^2\}$. $(a>0)$

[polární souřadnice s restrikcí, nekonstantní mez ρ, $\cos^6\varphi=\ \cos^2\varphi\ ^3=\dots$ *; vyjde* $\frac{5\pi k a^4}{4}$ *]*

1.31 Obsah části kužele $y^2+z^2=x^2$ uvnitř válce $x^2+y^2\le a^2$. $(a>0)$

[těžší příklad, polární souřadnice s konstantními mezemi, restrikce 8x, *obrázky nutné;* $2\pi a^2$ *]*

1.32 Objem tělesa Ω vymezeného plochami $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$.

[Ω *tedy vymezeno eliptickým kuželem a eliptickým paraboloidem, obrázek v* R^3 *ani projekce nejsou obtížné, zobecněné polární souřadnice, restrikce* 4x*;* 8π *]*