## 4.1 Křivkový integrál ve vektrovém poli – přímým výpočtem

4.1 Spočítejte práci síly $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ při pohybu hmotného bodu po orientované křivce $\gamma$, která je dána jako oblouk $ABC$ na průnikové křivce ploch $x^2 + y^2 = 1, z = xy$ od počátečního bodu $A = [1, y_A, z_A]$ přes bod $B = [x_B, 1, z_B]$ do koncového bodu $C = [-1, y_C, z_C]$.

[*nezadané souřadnice bodů A, B, C snadno spočítáte z rovnic ploch, stačí projekce oblouku ABC do roviny xy, parametrizace* $\gamma$ *lehká:* $x = \cos t$, $y = \sin t \Rightarrow z = \cdots$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, *(proč?) vyjde:*
$-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ ]

4.2 Spočítejte práci vektorového pole $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + z^2 \cdot \vec{j} + e^{xy} \cdot \vec{k}$ podél křivky $\gamma$, která je dána jako uzavřená orientovaná křivka $ABC$ tvořená oblouky na ploše $z = 1 - x^2$ pro $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, které leží postupně v rovinách $y = 0, z = 0, y = x$. Orientace je dána pořadím bodů $A = [0, 0, 1], B = [1, 0, 0], C = [1, 1, 0]$.

[*nakreslete si obrázek* $\gamma$ *v prostoru* $R^3$ *(parab. válec proťatý 3 rovinami); ihned uvidíte* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, *parametrizací* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *(není obtížná) a součtem 3 integrálů (polynomy a substituce) vyjde:*
$-\frac{38}{15} + e$ ]

4.3 Spočítejte práci silového pole $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j}$ které působí při pohybu hmotného bodu po kladně orientované uzavřené křivce $\gamma_+$ tvořené oblouky na křivkách $y = x^2, y = \sqrt{x}$.

[*obrázek* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ *je snadný, parametrizací* $\gamma_1, \gamma_2$ *a součtem dvou integrálů snadno vyjde:*
$-\frac{3}{20}$ ]

4.4 Spočítejte práci vektoru $\vec{F} = (e^x y^2 + z) \cdot \vec{i} + 2ye^z \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ podél křivky $\gamma\ :\ x = \ln t, y = t^2, z = t$, která je orientovaná z počátečního bodu $A = [0, 1, 1]$ do koncového bodu $B = [\ln 2, 4, 2]$.

[*obrázek* $\gamma$ *nepotřebujeme, interval* $t \in \langle \cdot, \cdot \rangle$ *zřejmý, integrací polynomu a per partes vyjde:*
$\frac{31}{5} + 8(e^2 + e) + 2\ln 2$. $(e^{\ln t} = t)$ ]

4.5 Určete hodnotu integrálu $\int_\gamma 4xy\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$, kde $\gamma$: $\vec{r}(t) = \sin t \cdot \vec{i} + \sin(2t) \cdot \vec{j} + e^{-t} \cdot \vec{k}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$.

[*přímým dosazením do integrálu a rozepsáním* $\sin(2t) = \ldots, \cos(2t) = \ldots$ *vyjde:*
$\pi - \frac{1}{3} - e^{-\pi}$ ]

4.6 Spočítejte integrál $\int_\gamma y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$, kde $\gamma_+ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a > 0, b > 0$ jsou konstanty.

[*parametrizace elipsy, ihned vyjde:* $-2\pi ab$ ]

4.7 Spočítejte práci vektrového pole $\vec{F} = (x + y) \cdot \vec{i} + 2x \cdot \vec{j}$ podél kladně orientované kružnice $\gamma_+$ se středem v počátku a poloměrem $r$.

[*také lehký příklad, parametrizace kruŘnice, vyjde:* $\pi r^2$ ]

4.8 Spočítejte práci vykonanou vektorem síly $\vec{F} = (3x^2 + 2y^2) \cdot \vec{i} + (4xy - 3y^2) \cdot \vec{j}$ po křivce $\gamma :\ x^2 + y^2 = 1$ od počátečního bodu $A = [1, 0]$ do koncového bodu $B = [0, 1]$.

[*obr.* $\gamma$ *a parametizace kružnice jednoduché, obvyklými goniometrickými substitucemi vyjde:* $-2$ ]

### 4.2 Nezávislost na integrační cestě

Ověřte podmínky nezávisloti na integrační cestě v daném potenciálovém poli $\vec{F} = (P, Q)$ resp. $\vec{F} = (P, Q, R)$, najděte potenciál $V$ a pro zadané body $A, B$ případně interval parametru $t$ spočítejte práci konanou při pohybu bodu z počátečního bodu $A$ do koncového bodu $B$.

4.9 $\vec{F} = (1 - 2xy - y^2) \cdot \vec{i} + (1 - 2xy - x^2) \cdot \vec{j},\ A = [0, 2], B = [1, 0].$

[ $V(x, y) = x - x^2y - y^2x + y + c,\ W = -1$ ]

4.10 $\int_\gamma xz^2 \mathrm{d}x + y^3 \mathrm{d}y + x^2 z \mathrm{d}z,\ A = [-1, 1, 2], B = [-4, 2, -1].$

[ $V(x, y, z)\frac{x^2z^2}{2} + \frac{y^4}{4} + c,\ W = \frac{39}{4}$ *, spočítejte si tak0 integrací po orientované úsečce AB!* ]

4.11 $\vec{F} = \frac{y^2}{1+x^2y^4} \cdot \vec{i} + \frac{2xy}{1+x^2y^4} \cdot \vec{j},\ \gamma:\ \vec{r}(t) = t \cdot \vec{i} + t^2 \cdot \vec{j},\ t \in \langle 0, 1 \rangle.$

[$V(x, y) = \operatorname{arctg}(xy^2) + c,\ W = \frac{\pi}{4}$*, tento příklad si spočítejte více způsoby – vychází velice jednoduše integrací*

*a) po zadané křivce gamma (subst. $t^5 = u$)*

*b) orientované úsečce $AB$ ($A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$)*

*c) „lomené“ orientované křivce $\gamma = AC \cup CB$, kde $C = [1, 0]$*

]

4.12 $\vec{F} = (x + yz) \cdot \vec{i} + (y + xz) \cdot \vec{j} + (z + xy) \cdot \vec{k},\ A = [1, 2, 3], B = [0, 0, 0].$

[$V(x, y, z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + xyz + c,\ W = -13$ ]

4.13 $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} - \frac{1}{z^2} \cdot \vec{k},\ \gamma:\ \vec{r}(t) = t\cos t \cdot \vec{i} + t \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k},\ t \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle.$

[$V(x, y, z) = x^2y + \frac{1}{z} + c,\ W = -\frac{1}{\pi}$ *(komplikovaný vypočet, když počítáme přímým výpočtem po křivce $\gamma$)* ]

4.14 $\vec{F} = e^x yz \cdot \vec{i} + (1 + e^x z) \cdot \vec{j} + e^x z \cdot \vec{k},\ \gamma:\ \vec{r}(t) = t \cdot \vec{i} + (t - 1) \cdot \vec{j} - 3t \cdot \vec{k},\ A = [1, 0, -3], B = [-1, -2, 3].$

[$V(x, y, z) = yz\,e^x + y + c,\ W = -\frac{6}{e} - 2$ *(spočítejte si také přímým dosazením)* ]

4.15 $\vec{F} = \frac{1}{z} \cdot \vec{i} + \frac{1}{z} \cdot \vec{j} - \frac{x+y}{z} \cdot \vec{k},\ \gamma:\ \vec{r}(t) = t^2 \cdot \vec{i} - 3t \cdot \vec{j} + t^3 \cdot \vec{k},\ t \in \langle 1, 2 \rangle.$

[$V(x, y, z) = \frac{x+y}{z} + c,\ W = \frac{7}{4}$*, (velice pěkně vyjde i bez výpočtu $V$ přímým dosazením)* ]

4.16 $\vec{F} = (3x^2y^2 - 2z^4) \cdot \vec{i} + 2x^3y \cdot \vec{j} - 8xz^3 \cdot \vec{k}$, spočítejte kmenovou funkci $V$.

[$V(x, y, z) = x^3y^2 - 2xz^4 + c$ ]

4.17 $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k},\ A = [0, 0, 0], B = [1, 1, 2].$

[$V(x, y, z) = xy + z^2 + c,\ W = 5$ ]

4.18 $\vec{F} = \frac{1}{y} \cdot \vec{i} + \frac{y^2-x}{y^2} \cdot \vec{j},\ A = [1, 1], B = [-6, 3]$. (předpokládáme, že $y \neq 0$).

[$V(x, y) = \frac{x}{y} + y + c,\ W = -1$ ]

4.19 $\vec{F} = \cos(2y) \cdot \vec{i} - 2x\sin(2y) \cdot \vec{j}$, $A = [1, \frac{\pi}{6}], B = [2, \frac{\pi}{4}]$.

$[V(x, y) = x\cos(2y) + c,\ W = -frac12\ \ ]$

4.20 Zjistěte, zda výraz $(2x\cos y - y^2 \sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2 \sin y)\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem a určete potenciál $V$.

[ *tedy opět ověříme podmínky nezávislosti a spočítáme* $V(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + c$ ]

4.21 $\vec{F} = (yz - y + z + 3) \cdot \vec{i} + (xz - x + 1) \cdot \vec{j} + (xy + x + 2z) \cdot \vec{k}$, $A = [0, 1, 2], B = [3, 2, 5]$.

[ $V(x, y, z) = xyz - xy + xz + 3x + y + z^2 + c$, $W = 70$ ]

4.22 $\vec{F} = (3x^2 + 2y^2) \cdot \vec{i} + (4xy - 3y^2) \cdot \vec{j}$, $\gamma:\ x^2 + y^2 = 1$ $A = [1, 0]$ do konc $B = [0, 1]$.

[ $V(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^3 + c$, $W = -2$, *(spočítejte si také přímou integrací po* $\gamma$*)* ]

### 4.3 Greenova věta

Ověřte podmínky použitelnosti Greenovy věty a užijte ji k výpočtu následujícího integrálu (cirkulace vektorového pole $\vec{F}$) po zadané křivce $\gamma$:

4.23 $\displaystyle\oint_{\gamma_-} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x-y)^2 \mathrm{d}y$, kde $\gamma_-$ je záporně orientovaná křivka tvořená obloukem grafu funkce $y = \sin x$ a úsečkou na ose $x$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

[*obrázek i výpočet dvojného integrálu jsou jednoduché (per partes), vyjde:* $4\pi$ ]

4.24 $\vec{F} = (1-x^2) \cdot \vec{i} + x\,(1+y^2) \cdot \vec{j}$, $\gamma_+ :\ \vec{r}(t) = 3\cos t \cdot \vec{i} + 3\sin t \cdot \vec{j},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

[*obrázek i výpočet dvojného integrálu je snadný (transformace do polárních souřadnic), bez problémů vyjde:* $\frac{117}{4}\pi$*, zkuste si také spočítat přímým výpočtem bez Greenovy věty - vychází to pěkně* ]

4.25 $\vec{F} = (xy + x + y) \cdot \vec{i} + (xy + x - y) \cdot \vec{j}$, $\gamma_+ :\ x^2 + y^2 = y$.

[*parametrizace posunuté kružnice (polární souřadnice), v intergrandu je rozdíl dvou funkcí a rozdělíteli si integrál na dva, bude druhý z nich nulový (proč?), pak už hned vyjde* $\frac{\pi}{8}$ ]

4.26 $\displaystyle\oint_{\gamma_+} (e^x \sin y - 16y)\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - 16)\,\mathrm{d}y$, kde $\gamma_+$ je kladně orientovaná hranice oblasti $D = \{[x,y]; x^2 + y^2 = ax, x \geq 0, y \geq 0\}$, kde $a > 0$ je konstanta.

[*opět posunutá kružnice, polárními souřadnicemi s posunem, nebo bez posunu do počátku, vyjde okamžitě* $2\pi a^2$ *(výsledek lze také uhodnout, protože integrand je konstanta)* ]

4.27 $\displaystyle\oint_{\gamma} y^2 \mathrm{d}x - x^2 \mathrm{d}y$, kde $\gamma_+$ je kladně orientovaná kružnice se středem $S = [1,1]$ a poloměrem $r = 1$.

[*polárními souřadnicemi nutně s posunem do počátku* $\begin{array}{ccc} x & = & 1+\rho\cos\varphi \\ y & = & 1+\rho\sin\varphi \end{array}$ *, konst. meze* $\rho$, $\varphi$; *vyjde snadno* $-4\pi$ *(vychází pěkně i přímým výpočtem bez použití Greenovy věty)* ]

4.28 $\displaystyle\oint_{\gamma} \left(x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y$, kde $\gamma_-$ je záporně orientovaná křivka tvořená půlkružnicí $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a úsečkou na ose $x$.

[*„obyčejné“ polární souřadnice s konstantními mezemi, bez problémů vyjde* $-\frac{4}{3}r^3$ ]

4.29 $\displaystyle\oint_{\gamma} \left(6x\cos y - y^3\right) \mathrm{d}x + \left(x^3 - 3x^2 \sin y\right) \mathrm{d}y$, kde $\gamma_+$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

[*také „obyčejné“ polární souřadnice s konstantními mezemi, velice jednoduchý integrál, výsledek* $\frac{3\pi}{2}$ *(bez použití Greenovy věty vychází nepěkně)* ]

4.30 $\displaystyle\oint_{\gamma} (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x-y)^2 \mathrm{d}y$, kde $\gamma_+$ je kladně orientovaná křivka tvořená obloukem paraboly $y = x^2$ a úsečkou na přímce $y = x$.

[*bez problémů ihned vyjde* $-\frac{1}{3}$ ]

4.31 $\vec{F} = \frac{1}{y} \cdot \vec{i} - \frac{1}{x} \cdot \vec{j}$, $\gamma_+$ je trojúhelník $ABC$ s vrcholy $A = [1,1], B = [2,1], C = [2,2]$.

[*také jednoduchý příklad bez transformace do polárních souřadnic, vyjde* $\frac{1}{2}$ ]

4.32 $\oint\limits_{\gamma} \left(xy + x^2\right) \mathrm{d}x + x^2 y \mathrm{d}y$, kde $\gamma_+$ je kladně orientovaná hranice oblasti $D = \{[x,y]; 0 \le x \le y \le 1\}$.

[*snadné s Greenovou větou i bez Greenovy věty, integrací polynomu vyjde* $\frac{1}{12}$ ]

4.33 $\vec{F} = (1+xy)e^{xy} \cdot \vec{i} + x^2 \left(1 + e^{xy}\right) \cdot \vec{j}$, $\gamma_+$ obdélník $ABCD$ s vrcholy $A = [0,0], B = [2,0], C = [2,1], D = [0,1]$.

[*integrand vychází velice jednoduše, lehce vyjde:* 4 ]

4.34 $\vec{F} = x \arctan y \cdot \vec{i} + \frac{1}{1+y^2} \cdot \vec{j}$, $\gamma_+$ je trojúhelník $KLM$ s vrcholy $K = [-1,0], L = [0,0], M = [0,1]$.

[*těžší příklad: nejdříve substituce* $x+1 = t$ *potom per partes* $u = \operatorname{arctg} t, \quad v' = t - 1$*; pak už bez problémů vyjde* $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ ]

**„Obrácenou“ Greenovou větou spočítejte obsah rovinného obrazce D:**

4.35 $D = \{[x,y] \in R^2; x^2 \le y \le x\}$.

[*parametrizace* $\gamma_+ = \gamma_1 \cup \gamma_2$ *snadná, bez problémů vyjde* $\frac{1}{6}$ *(bez Greenovy věty ješte kratší)* ]

4.36 $D = \{[x,y] \in R^2; y \ge \ln x, -x+1 \le y \le 1\}$.

[*také nutný obrázek, parametrizace* $\gamma_+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ *není obtížná, vyjde* $e - \frac{3}{2}$ ]

4.37 $D = \{[x,y] \in R^2; e^x \le y \le e^\pi, x \ge 0\}$. (Pozor: $e^\pi$ je konstanta!)

[*opět parametrizace* $\gamma_+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$*, užitím per partes vyjde* $e^\pi(\pi - 1) + 1$ *(bez Greenovy věty je výpočet kratší – zkuste si spočítat)* ]