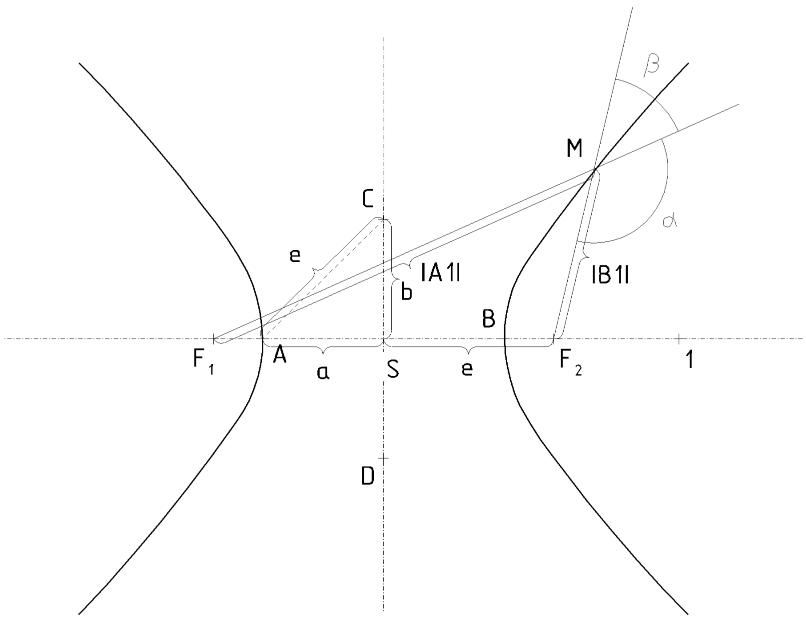
Kuželosečky

Hyperbola

Definice: Hyperbola $\mathcal{H}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od dvou pevných (různých) bodů v $\mathbb{E}_2$, zvaných ohniska (značíme F_1, F_2), stálý rozdíl vzdáleností rovný 2a, který je menší než vzdálenost obou ohnisek.



$M \in \mathcal{H} \Rightarrow ||MF_1|-|MF_2|| = 2a$
$|MF_1|-|MF_2| = 2a$ nebo
$|MF_2|-|MF_1| = 2a \Rightarrow$
$\mathcal{H}$ má dvě větve

MF_1, MF_2 : průvodiče
A, B : hlavní vrcholy $\mathcal{H}$
C, D : vedlejší vrcholy $\mathcal{H}$,
vedlejší vrcholy C, D neleží na $\mathcal{H}$
$AB \cap CD = S$: střed hyperboly $\mathcal{H}$
a : velikost hlavní poloosy
b : velikost vedlejší poloosy
$|F_1S|+|F_2S| = e$: excentricita (výstřednost)
$e^2 = a^2+b^2$: charakteristický $\Delta\, \mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ má *dvě osy souměrnosti*:
AB – hlavní osa
CD – vedlejší osa

M$\in\mathcal{H}$: $\angle F_1MF_2$ – obsahující střed S – nazýváme *vnější úhel průvodičů*. K vnějšímu úhlu průvodičů β se vedlejší úhel α nazývá *vnitřní úhel průvodičů.*

M$\in\mathbb{E}_2$ libovolný : $||MF_1|-|MF_2|| < 2a \Rightarrow M$ je vnějším bodem hyperboly $\mathcal{H}$.

$||MF_1|-|MF_2|| > 2a \Rightarrow M$ je vnitřním bodem hyperboly $\mathcal{H}$.

Tečna v nevlastním bodě $\mathcal{H}$ se nazývá asymptota – hyperbola $\mathcal{H}$ má dvě asymptoty. Asymptoty p, q jsou úhlopříčkami v obdélníku o středních příčkách AB, CD.

Hyperbola $\mathcal{H}$ se nazývá rovnoosá $\Leftrightarrow a = b.$

Hyperbola má hyperoskulační kružnice v hlavních vrcholech.

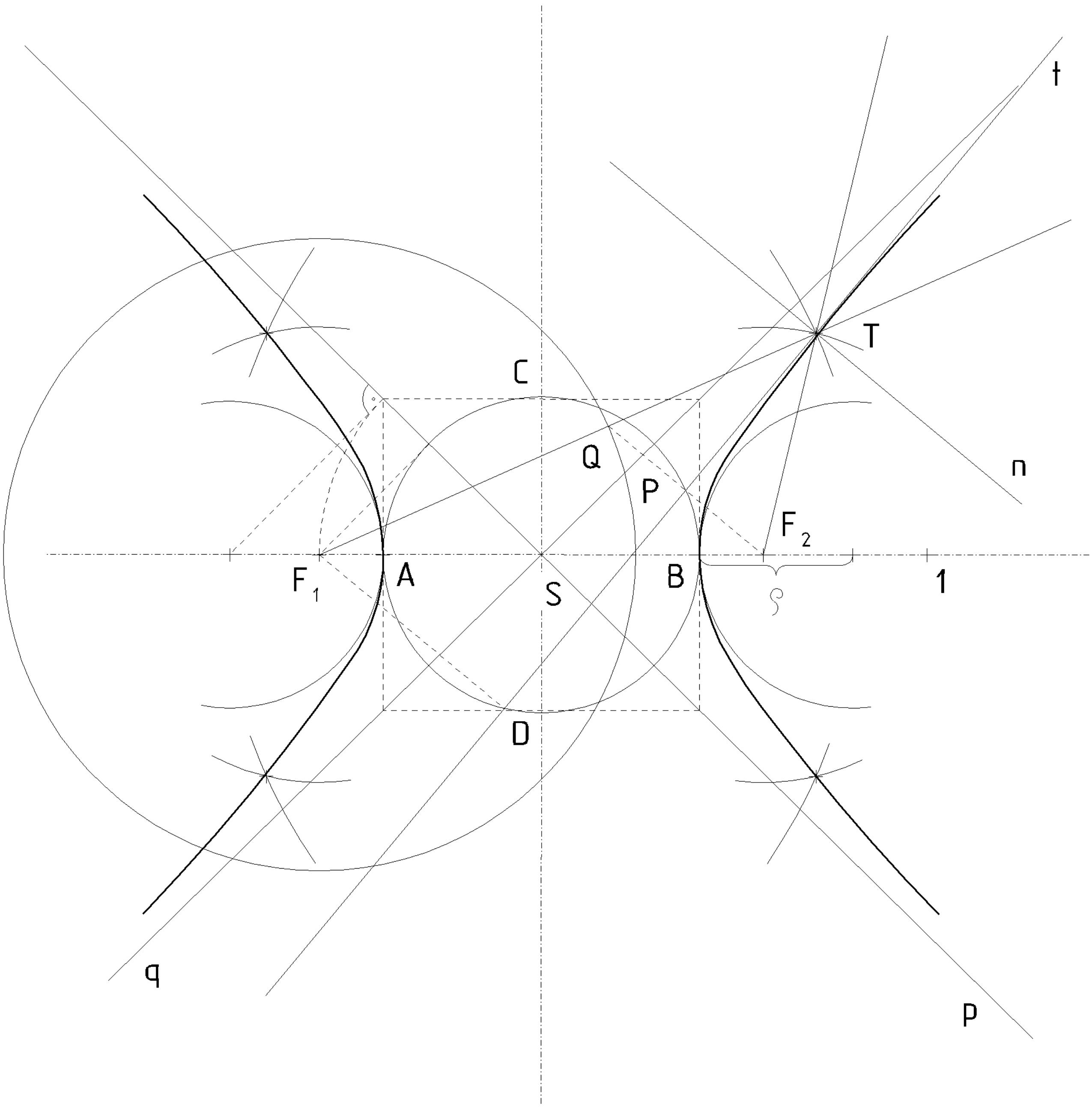
Věta$_T$: V každém bodě $\mathcal{H}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí vnitřní úhel průvodičů.

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly $\mathcal{H}$ na její tečny je *vrcholová* kružnice $k(S,a)$.

Věta$_Q$: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly $\mathcal{H}$ (například F_1) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

Příklad č. 6: D: $\mathcal{H}$ (F_1, F_2, a), $|F_1F_2| > 2a$

S: sestrojte několik bodů hyperboly, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{H}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q

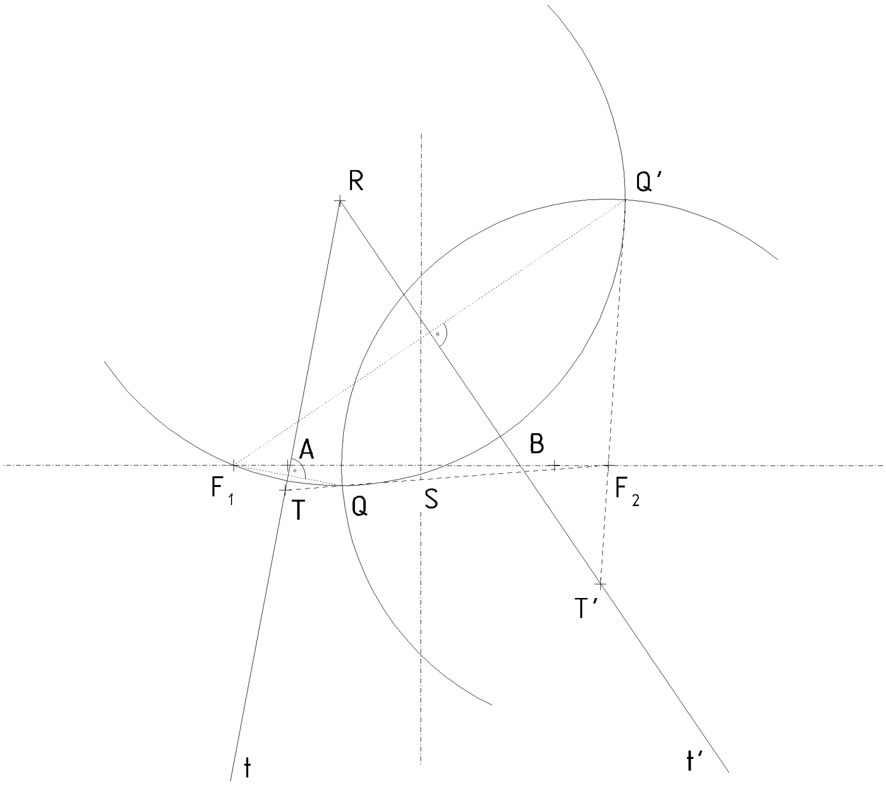


ρ – poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholech A, B.

Příklad č. 7: D: $\mathcal{H}$ (F_1, F_2, A), R

S: sestrojte tečny z bodu R k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku

Rozbor i konstrukce stejná jako v Příkladu 2 pro $\mathcal{E}$.

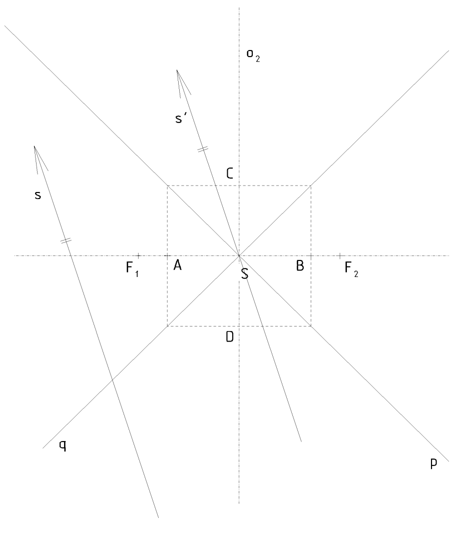


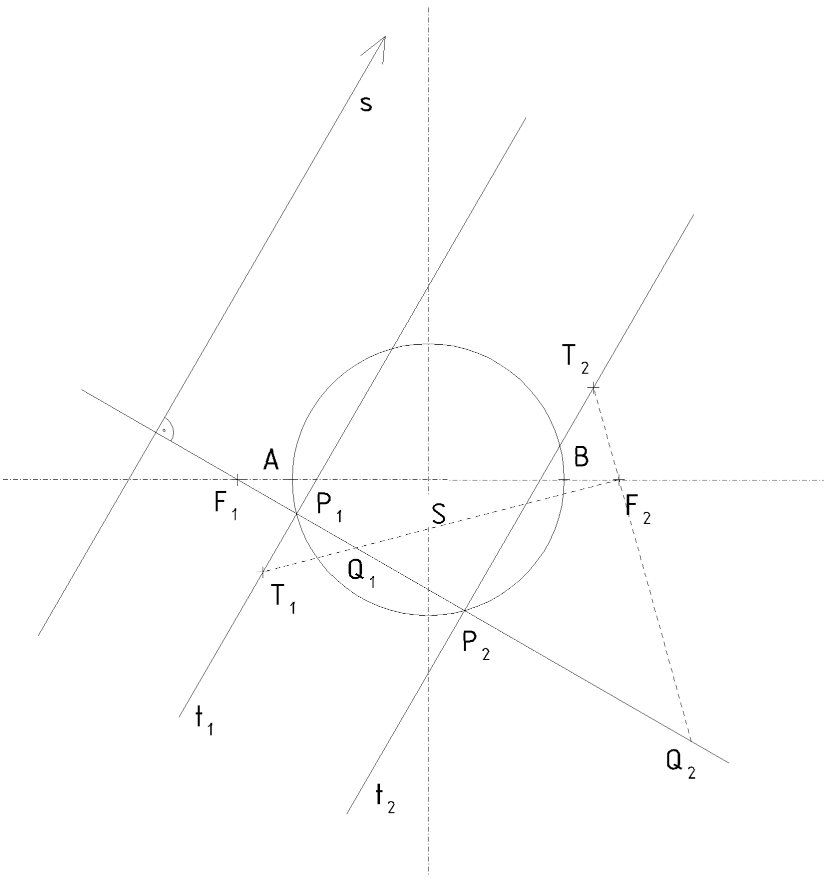
Příklad č. 8: D: $\mathcal{H}$ (A, B, e), s

S: sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku

Rozbor i konstrukce stejná jako v Příkladu 3 pro $\mathcal{E}$.

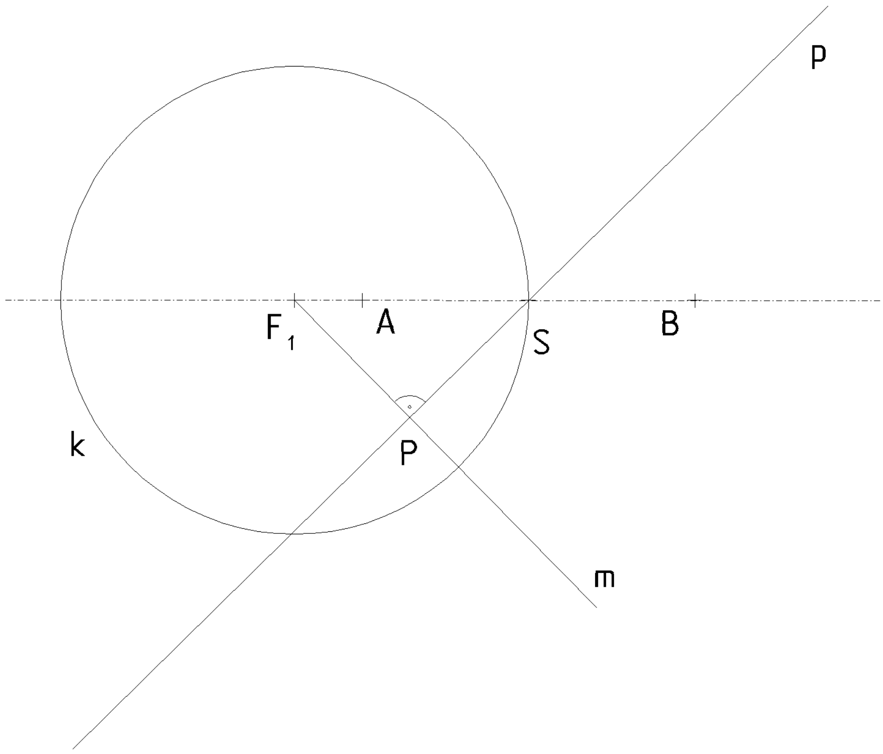
Úloha nemá řešení pro směr s, pokud s', kde $s' \parallel s$, $S \in s'$, neleží v úhlu asymptot obsahující vedlejší osu hyperboly $\mathcal{H}$.





Příklad č. 9: D: $\mathcal{H}$ (F, p, e)

S: sestrojte hyperbolu $\mathcal{H}$



Konstrukce:

1) m; $F \in m$, $m \perp p$
2) $P = m \cap p$
3) $k(F, e)$
4) $S = k \cap p$
5) $a = |PS|$
6) $\mathcal{H}$ (F, S, a)